



INSTITUT INTERAMÉRICAIN DE COOPERATION POUR L'AGRICULTURE

Centro Interamericano de Documentación e Información Agrícola

20 AGO 1985

IICA - CIDIA

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

☆☆
☆☆ MARND R
☆☆ FAM V
☆☆ IICA

PREMIER COURS NATIONAL POST-GRADUE SUR L'IRRIGATION, LE DRAINAGE ET LA GESTION DES RESSOURCES HYDRIQUES

15 Juillet - 30 Septembre 1985

Port-au-Prince, Haiti

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

HYDRAULIQUE

GENERALE

PAR IICA

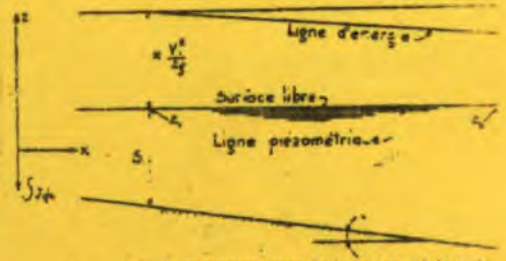


FIG. 17 Comparaison entre la ligne d'eau et la pente

Yvon Dorestant, Ing.
Consultant Sagecir

IICA
PM
595

Misc. Publ. 595 ISSN-0534-5391

REVISION ET EDITION: HUMBERTO PIZARRO
Spécialiste en Irrigation et Drainage
IICA- HAITI





INSTITUT INTERAMÉRICAIN DE COOPERATION POUR L'AGRICULTURE

Centro Interamericano de
Documentación e
Información Agrícola

20 AGO 1985

IICA — CIDIA

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆
☆☆
☆☆ **MARND R** ☆☆☆
☆☆ **FAMV** ☆☆☆
☆☆ **IICA** ☆☆☆
☆☆ **PREMIER** ☆☆☆
☆☆ **COURS NATIONAL** ☆☆☆
☆☆ **POST-GRADUE** ☆☆☆
☆☆ **SUR L'IRRIGATION,** ☆☆☆
☆☆ **LE DRAINAGE** ☆☆☆
☆☆ **ET LA GESTION** ☆☆☆
☆☆ **DES RESSOURCES** ☆☆☆
☆☆ **HYDRIQUES** ☆☆☆
☆☆
☆☆ **15 Juillet - 30 Septembre 1985** ☆☆☆
☆☆
☆☆ **Port-au-Prince, Haïti** ☆☆☆
☆☆
☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

HYDRAULIQUE

GENERALE

PAR

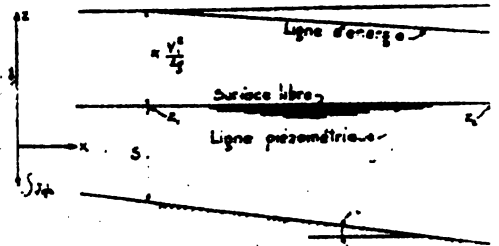


Fig. 17 Comparaison entre la ligne libre et la pente

Yvon Dorestant, Ing.
Consultant Sagecir

Misc. Publ. 595 ISSN-0534-5391

REVISION ET EDITION: HUMBERTO PIZARRO
Spécialiste en Irrigation et Drainage
IICA- HAITI

00008271

~~00444~~

~~00000024~~

**PREMIER COURS NATIONAL POST-GRADUE
SUR L'IRRIGATION, LE DRAINAGE
ET LA GESTION DES RESSOURCES HYDRIQUES**

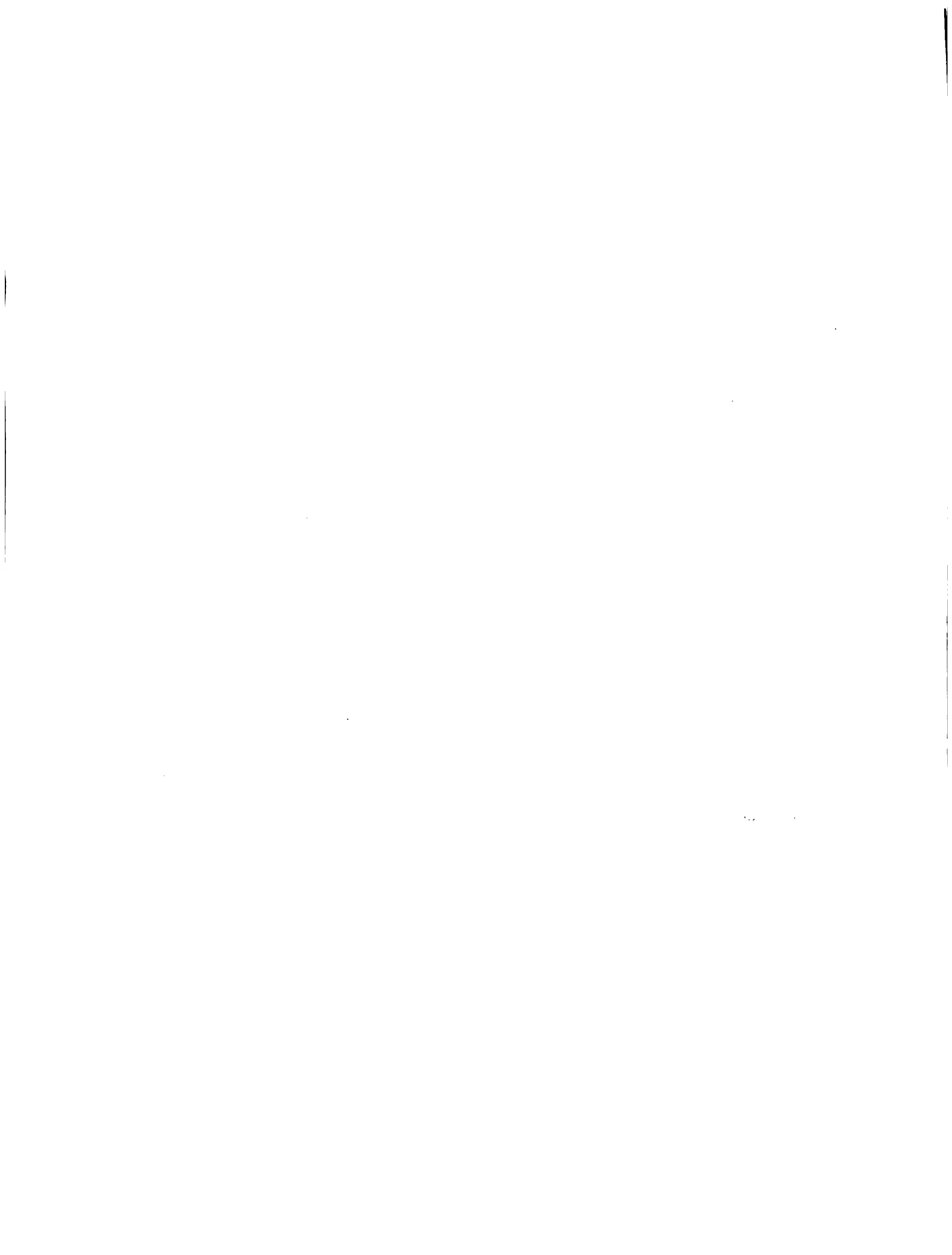
COORDINATION:

**INSTITUT INTERAMERICAIN DE
COOPERATION POUR L'AGRICULTURE (IICA)
FACULTE D'AGRONOMIE ET
MEDECINE VETERINAIRE (FAMV)**

SOUTIEN FINANCIER:

**AGENCE DE DEVELOPPEMENT INTERNATIONAL (USAID)
AGENCE CANADIENNE POUR LE DEVELOPPEMENT INTERNATIONAL (ACDI)
INSTITUT INTERAMERICAIN DE COOPERATION POUR L'AGRICULTURE (IICA)
MINISTERE DE L'AGRICULTURE, DES RESSOURCES NATURELLES ET
DEVELOPPEMENT RURAL (MARNDR)
FACULTE D'AGRONOMIE ET MEDECINE VETERINAIRE (FAMV)**

**TEXTE: HYDRAULIQUE GENERALE
DACTYLOGRAPHIE LAURENCE JOACHIM
DESSINS JEAN ROBERT MOREL
IMPRESSION : ALCE SARDE**



HYDRAULIQUE GENERALE

TABLE DES MATIERES

Page

TABLE DES MATIERES	i
LISTE DES FIGURES	iv
LISTE DES TABLEAUX	vi

CHAPITRE I

CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS

Expérience de Reynolds	1
La viscosité	3
Expérience de Couette	3
Ecoulement laminaire entre deux plaques planes parallèles	7
Ecoulement laminaire dans un tuyau circulaire	10
Ecoulement turbulent	12
Turbulence	13
Distribution de la vitesse en régime turbulent	14
Notion de vitesse moyenne	14

CHAPITRE II

ECOULEMENT A SURFACE LIBRE

Répartition des Vitesses dans la section transversale	18
Distribution de la pression dans une section transversale	19

CHAPITRE III

ECOULEMENT UNIFORME

Formule générale de l'écoulement pour un canal de section transversale constante	22
Formule de Bazin	25
Formule de Manning-Stricker	25
Application des formules de l'écoulement uniforme aux cours d'eau naturels	27
Section transversale composée	27
Problèmes sur les canaux en régime uniforme	30
Cas de la section trapézoïdale	32
Profil de débit maximum	32
Formule de Porchet	32
Problèmes courants dans le calcul des canaux	37
Aqueducs	38
Conditions de débit maximum	38
Conditions de vitesse maximale	40
Aqueduc circulaire	41



CHAPITRE IV
REGIME PERMANENT VARIE

	Page
Ecoulement graduellement varié	43
Comparaison entre la pente de la ligne d'eau et la pente du fond	44

CHAPITRE V

IMPULSION TOTALE	49
L'énergie spécifique	51
Régime critique	57
Pente critique	57
Ecoulement fluvial - Ecoulement torrentiel	58
Formule de régime critique	59
Section de forme quelconque	59
Section rectangulaire	61
Profondeurs correspondantes	62
Etude de la forme de la ligne d'eau	64
Formes de la ligne d'eau	64
Canaux à faible pente	68
Canaux à forte pente	71
Canaux à pente horizontale	72
Canaux à pente critique	74
Calcul de la ligne d'eau	75
Méthode de Bakhmeteff	76
Simplification de la méthode	78
Méthode par approximations successives	81
Ressaut hydraulique	83
Longueur du ressaut	84
Profondeurs conjuguées du ressaut hydraulique	84
Cas d'une section rectangulaire	86
Perte de charge dans le ressaut hydraulique	87
Section rectangulaire	88
Localisation du ressaut	88

CHAPITRE VI

REGIMES VARIES ET SINGULARITES	90
Retrécissement long	90
Elargissement long	96
Canal Venturi ou Parshall	97
Piles de ponts	101
Déversoirs	104
Déversoirs rectangulaire à mince paroi	
Quelques formules de déversoir	107
Déversoir triangulaire	107
Déversoir trapézoïdal Cipolletti	108
Déversoir à seuil épais	109
Déversoir à seuil normal	110



CHAPITRE VII

	Page
ELEMENTS D'HYDRAULIQUE FLUVIALE	112
Transport de sédiment	112
Le charriage	112
Transport débit solide	115

CHAPITRE VIII

ELEMENTS D'ANALYSE DIMENSIONNELLE ET DE SIMILITUDE HYDRAULIQUE

Généralités	123
Analyse dimensionnelle	123
Théorème de Buckingham ou théorème des $\bar{\Pi}$	124
Produits sans dimension en hydraulique	126
Similitude hydraulique	127
Similitude cinématique	127
Similitude dynamique	129
Lois de la similitude dynamique	134
Incompatibilité des similitudes de Froude et de Reynolds	138

CHAPITRE IX

MACHINES HYDRAULIQUES

Généralités	140
Machines élévatoires	141
Pompes	142
Pompes alternatives	142
Constitution de la pompe centrifuge	143
Equation fondamentale des pompes centrifuges	145
Le moment de la quantité de mouvement	147
Courbe caractéristique de la pompe centrifuge $H = f(Q)$	150
Courbe caractéristique de la pompe centrifuge idéale	152
Définitions	155
Hauteur géométrique d'aspiration	155
Hauteur géométrique de refoulement	155
Hauteur totale d'aspiration	155
Hauteur totale de refoulement	156
Hauteur totale d'élévation	156
Puissance fournie par la pompe	156
Rendement de la pompe	157
Rendement de la pompe-moteur	157
Courbe caractéristique du système	157
Charge nette à l'aspiration N_pSH	159
Relation de similitude dans les pompes centrifuges	160
Variation du diamètre	161
Variation de la vitesse	161
Vitesse spécifique	162

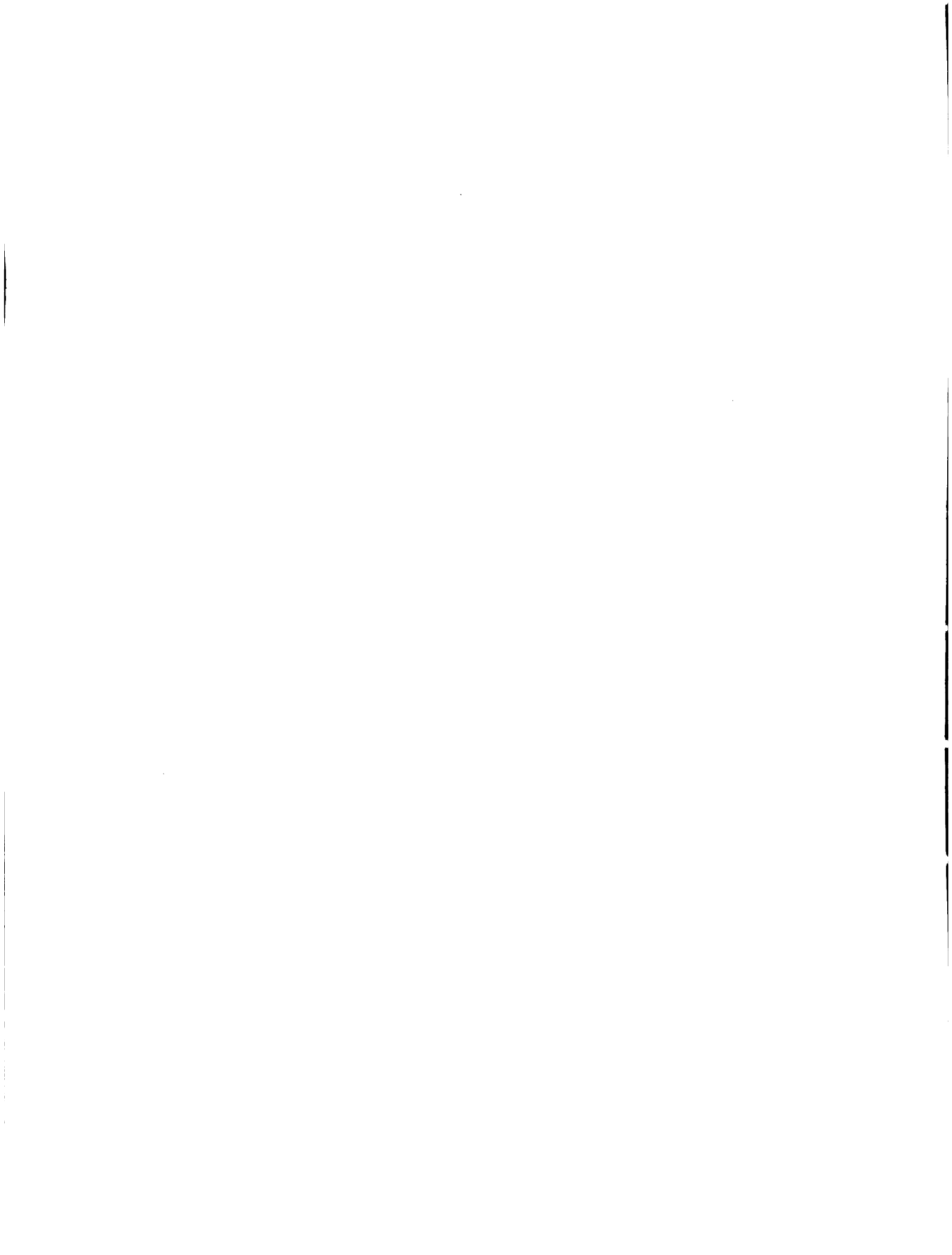


LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1	Schéma de l'expérience de Reynolds pour la visualisation des types d'écoulement	1
2	Schéma de l'expérience de Couette	4
3	Schéma de l'écoulement entre deux plaques parallèles	7
4	Schéma pour la visualisation de l'écoulement laminaire dans un tuyau circulaire	10
5	Pulsation de la vitesse dans un courant turbulent	14
6	Schéma de l'écoulement à surface libre	17
7	Distribution de la vitesse dans un canal trapézoïdal	18
8	Distribution de la vitesse dans un canal rectangulaire	18
9	Distribution de la pression dans une section transversale	19
10	Variation de la pression dans les courbes	20
11	Effet de la pente sur le calcul de la pression	20
12	Schéma pour la visualisation de l'écoulement uniforme	27
13	Section transversale composée	28
14	Section transversale trapézoïdale	30
15	Section trapézoïdale maximum	33
16	Aqueduc circulaire	41
17	Comparaison entre la ligne d'eau et la pente du fond	44
18	Schéma d'un bief d'un cours d'eau pour l'application de l'impulsion totale	47
19	Schéma pour la visualisation de l'énergie dans un écoulement à surface libre	51
20	Section transversale pour visualiser l'obtention de l'équation de l'énergie	52
21	Schéma de la relation profondeur d'eau - débit pour une valeur d'énergie spécifique donnée	55
22	Schéma de la relation $E f(d)$	68
23	Schéma de la forme de la ligne d'eau pour un canal à faible pente	68



Figure		Page
24	Forme de la ligne d'eau: courbe 1 et courbe 2	69
25	Forme de la ligne d'eau courbe 3	70
26	Forme de la ligne d'eau, canal à forte pente	71
27	Forme de la ligne d'eau, canal à pente horizontale	72
28	Forme de la ligne d'eau, courbe 1 et courbe 3	73
29	Forme de la ligne d'eau, canal à pente critique	74
30	Forme de la ligne d'eau, canal à pente ascendante	74
31	Forme de la ligne d'eau, courbe 2 et courbe 3	75
32	Schéma du ressaut hydraulique	83
33	Schéma de la force hydraulique $F = f(d)$	85
34	Schéma de la force et de l'énergie spécifique pour calculer la perte de charge dans le ressaut hydraulique	87
35	Schéma de l'effet d'une variation de la section sur l'écoulement	94
36	Schéma du jaugeur Parshall	100
37	Effet des piles de ponts sur l'écoulement	102
38	Schéma de l'écoulement sur un déversoir	105
39	Section transversale d'un déversoir triangulaire	107
40	Section transversale d'un déversoir trapézoïdal Cipolletti	108
41	Section d'un déversoir à seuil épais	109
42	Déversoir à seuil normal	111
43	La force tractrice dans un canal trapézoïdal	118
44	Relation entre le diamètre et l'angle de repos et K et Z	121
45	Section d'une pompe centrifuge	144
46	Les vitesses d'entrée et de sortie dans une pompe centrifuge	146
47	Composantes de la vitesse dans une pompe	147
48	Schéma pour l'analyse de la vitesse dans une pompe centrifuge	150
49	Analyse de la courbe caractéristique de la pompe centrifuge idéale	152
50	Courbe caractéristique théorique de la pompe réelle et les pertes de charge	154
51	Relation perte de charge - débit	158
52	Courbe caractéristique du système	159



LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
1	Les valeurs de m dépendant de la nature des parois	25
2	Valeurs des coefficients pour différentes catégories des parois des canaux	27
3	Valeurs des talus (z) selon le type de matériel	32
4	Valeurs de l'exposant de la formule du débit dans un Parshall	99
5	Valeurs de K_m , K'_m et K_h pour les canaux trapézoïdaux	119
6	Valeurs de K'_m et K_h pour les canaux triangulaires	119
7	Valeurs de ζ , en kg/m^2 pour les matériaux non cohérents fins	121
8	Valeurs de ζ , en kg/m^2 pour les matériaux cohérents	122

CLASSIFICATION DES ECOULEMENTS

En hydraulique on distingue deux régimes d'écoulement:

- Le régime d'écoulement laminaire ou écoulement laminaire et,
- Le régime d'écoulement turbulent ou écoulement turbulent.

L'existence de différents modes d'écoulement avait été soupçonné bien avant leur mise en évidence. Ainsi l'hydraulicien Ludwig Hagen mentionna dans ses études l'existence de deux types d'écoulement sans toutefois arriver à donner le moyen de les différencier et de les reconnaître. C'est Osborne Reynolds qui un peu plus de cinquante ans plus tard, par sa fameuse expérience découvrit des critères chiffrés permettant de distinguer et de reconnaître quand on est dans les limites de tel ou tel régime d'écoulement.

2- Expérience de Reynolds

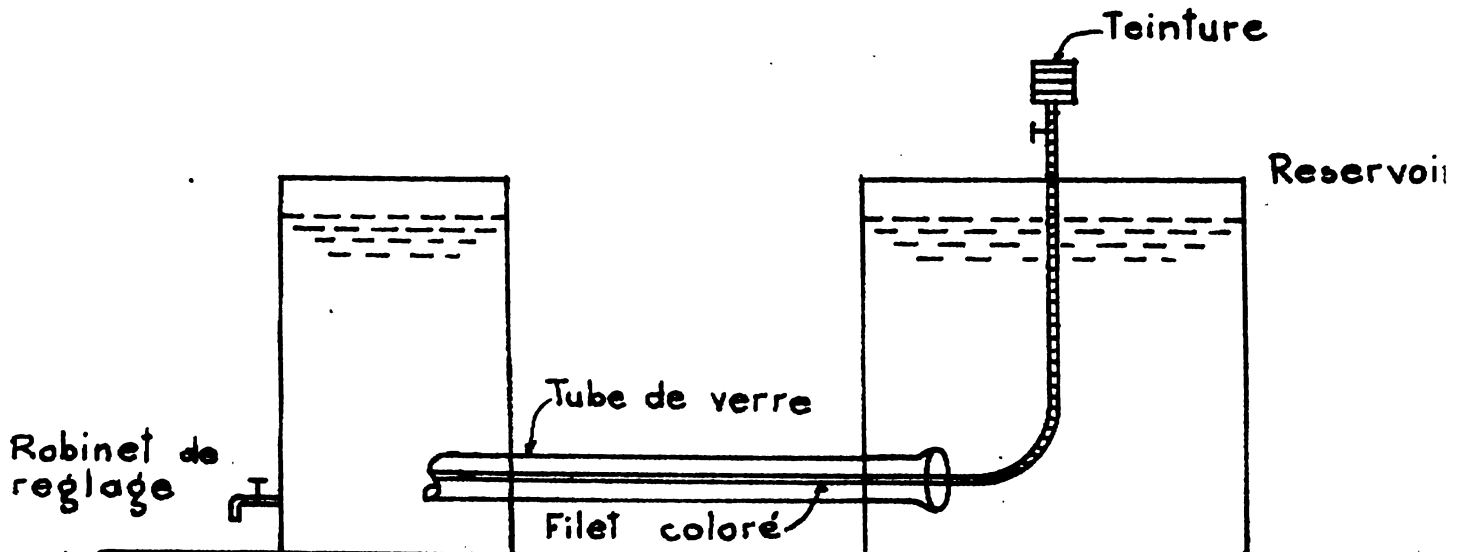


Fig. 1 Schéma de l'expérience de Reynolds pour la visualisation des types d'écoulement.



Le dispositif expérimental est essentiellement constitué d'un réservoir contenant le liquide et une cuve munie d'un robinet de charge. Le réservoir est relié à la cuve par un tube en verre horizontal. A l'extrémité du tube qui débouche dans le réservoir on injecte un colorant dans l'axe même du tube.

En ouvrant plus ou moins le robinet du réglage on fait varier la vitesse dans le tube, et l'on constate ceci:

- Quand la vitesse dans le tube est faible le colorant forme dans l'axe du tube un trait droit parfaitement net, sans mélange avec le liquide d'à côté. Le mouvement du liquide dans le tube se fait en filets parallèles sans enchevêtrement c'est le régime laminaire.
- Quand la vitesse dans le tube augmente on constate des oscillations du trait qui devient sinueux et au-fur-et-à-mesure que la vitesse croît, à un certain moment le trait éclate il se forme des tourbillons et des mouvements désordonnés des particules jusqu'à la répartition des particules colorées dans toute la section du tube où le liquide acquiert une coloration uniforme. L'écoulement est devenu turbulent. C'est le régime turbulent.
- La difficulté du problème résidait dans la mise en évidence d'un paramètre pouvant servir de critère au type d'écoulement. C'est justement ce qu'à fait Reynolds en dégagant ce paramètre: le nombre qui porte son nom, le nombre de Reynolds.

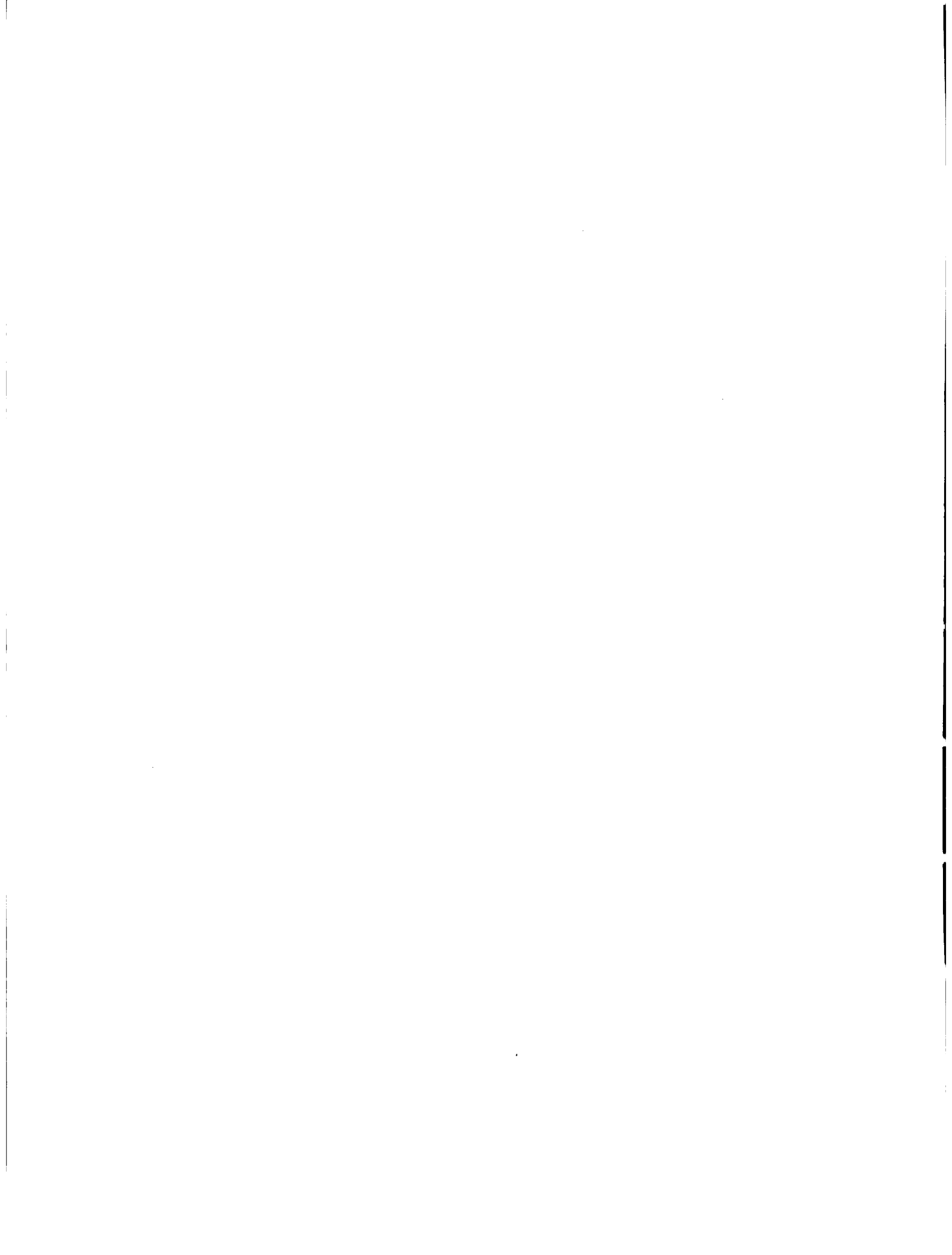
$$R = \frac{V D}{\nu}$$

R = Nombre de Reynolds

V = Vitesse moyenne m/s

D = Diamètre du tube, en m

ν = Viscosité cinématique m²/s



Le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent se fait pour un nombre de Reynolds aux environs de 2000.

$R < 2000$ Ecoulement Laminaire

$R > 2000$ Ecoulement Turbulent

3- Viscosité

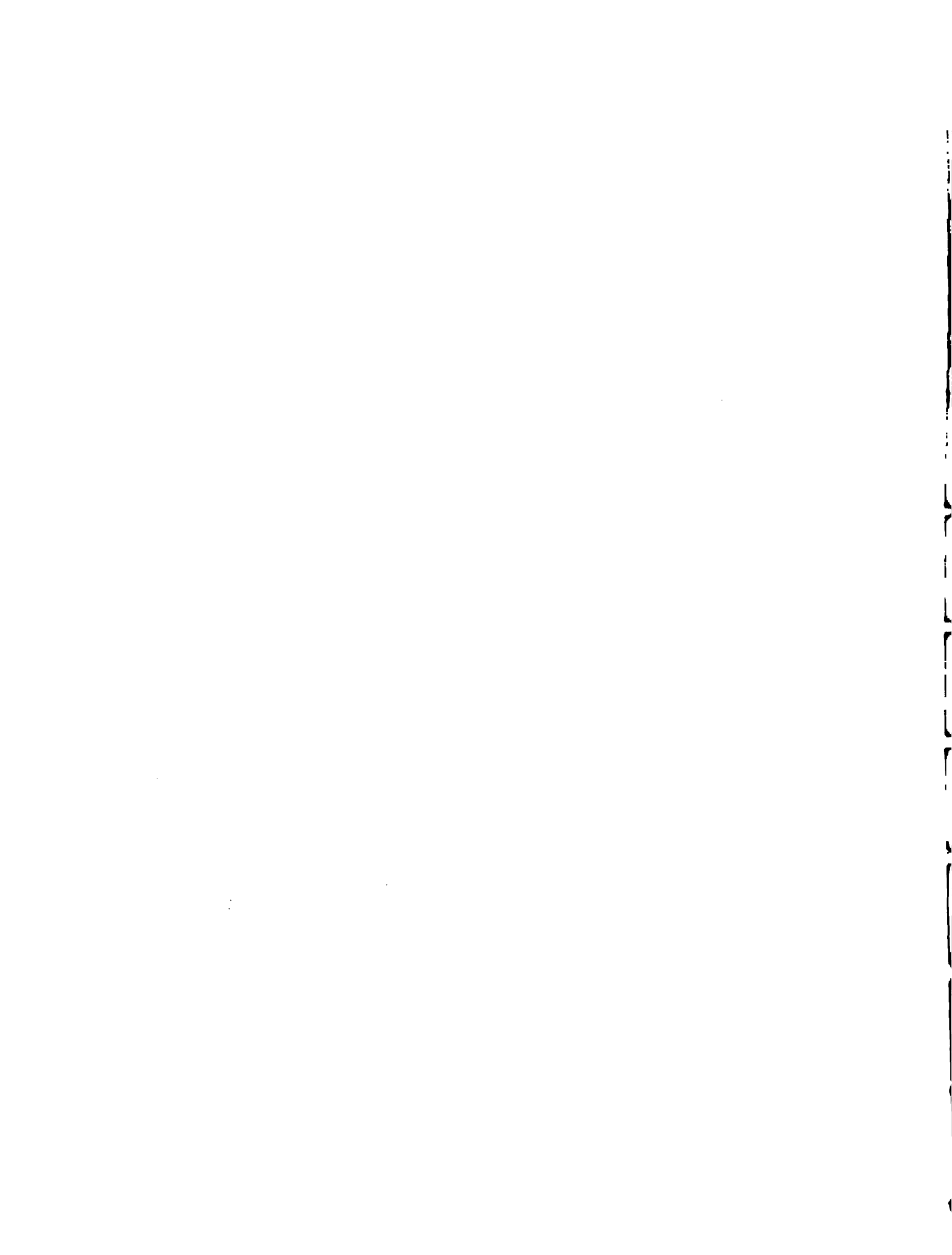
Le fluide parfait se caractérise entre autres propriétés par une mobilité sans gêne de ses molécules les unes par rapport aux autres

Dans le fluide naturel les molécules ne disposent pas de cette complète et totale mobilité sans contrainte. Le déplacement d'une molécule se repercute sur les molécules adjacentes. Dans ce mouvement relatif chaque molécule entraîne ou retarde les molécules adjacentes par un effort de frottement tangential qui ne se manifeste que dans le mouvement de la masse fluide. Il y a une sorte d'adhérence entre les molécules constituant la masse fluide. La viscosité est ce lien d'adhérence qu'il y a entre les éléments de la masse fluide et qui se manifeste dans le mouvement du fluide sous la forme d'un effort tangential. La Viscosité provoque dans le mouvement, la dissipation sous forme de chaleur, de l'énergie cinétique du fluide.

Nous allons exposer l'expérience de Couette qui a mis en évidence la viscosité et a permis sa mesure.

3- Expérience de Couette

Couette utilise pour son expérience deux cylindres coaxiaux de rayons peu différents, qui peuvent tourner librement autour de leur axe commun. L'espace compris entre les deux cylindres est rempli du fluide



à étudier.

Soit:

h : La hauteur des cylindres

e : L'espace annulaire entre les deux cylindres. (différence des diamètres des cylindres)

r : Le rayon du cylindre interne

Lorsqu'on fait tourner le cylindre extérieur à la vitesse angulaire W , le cylindre intérieur est entraîné et pour le maintenir fixe il faut exercer un couple C de sens contraire au mouvement du cylindre extérieur.

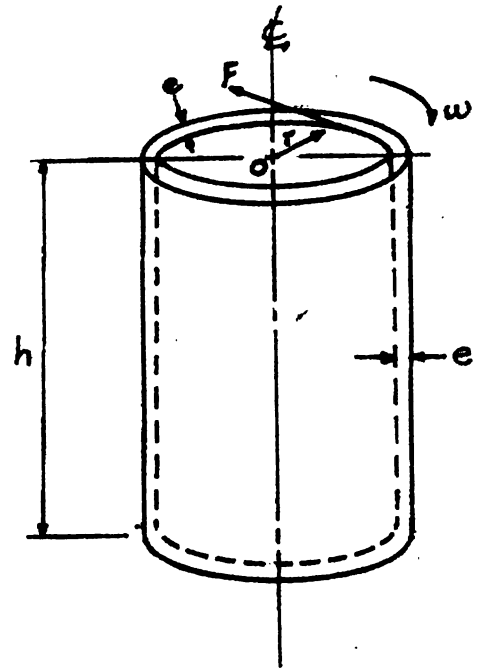


Fig. 2 Schéma de l'expérience Couett

Cette expérience met en évidence l'existence d'effort tangentiel au contact des couches successives de fluide. En faisant varier la vitesse angulaire W donc la vitesse tangentielle $V = Wr$.

ou:

$$V = \text{Vitesse, m/s}$$

$$W = \text{Vitesse angulaire } 1/s$$

$$r = \text{Rayon, m}$$

La hauteur h et la distance e , on constate que la force ($F = \frac{C}{r}$) qu'il faut pour maintenir fixe le cylindre intérieur, est de la forme:

$$F = \mu \frac{S V}{e}$$



où:

$S = 2r\pi h$, surface latérale des cylindres, en m^2

μ = Coefficient dépendant du fluide (viscosité dynamique)

$$\frac{N-1}{m^2}$$

En passant aux dimensions élémentaires on a:

$$dF = \mu ds \frac{dV}{Dn}$$

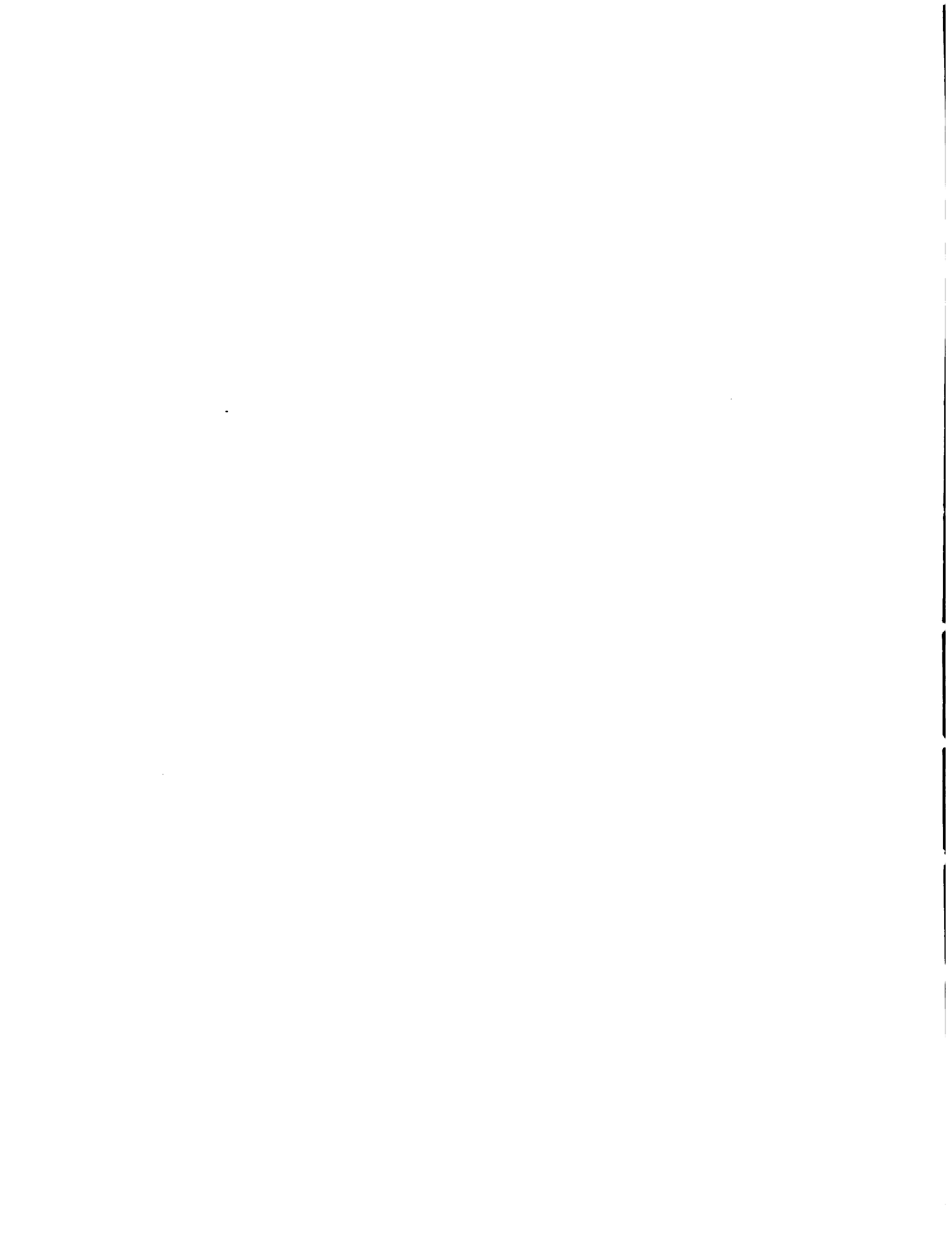
qui est la force de frottement s'exerçant sur un élément de surface ds qui est en contact avec 2 couches de fluide animées, respectivement, de vitesse V et $V + dV$, et séparées par la distance dn .

La force unitaire de frottement sera alors:

$$\frac{dF}{ds} = -\mu \frac{dV}{dn}$$

Le signe moins est pour indiquer que l'effort de frottement s'oppose au déplacement. Et en désignant par τ l'effort de frottement unitaire ou tension tangentielle on a:

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dn}$$



C'est la loi de Newton de la tension tangentielle par unité de surface qui est proportionnelle à la variation de la vitesse suivant la normale à la surface.

Le terme μ est appelé coefficient de Viscosité Dynamique. De la relation:

$$F = \mu \frac{S V}{e} \quad \text{on tire}$$

$$\mu = \frac{F e}{S V} = \frac{C e}{2\pi r^3 h W}$$

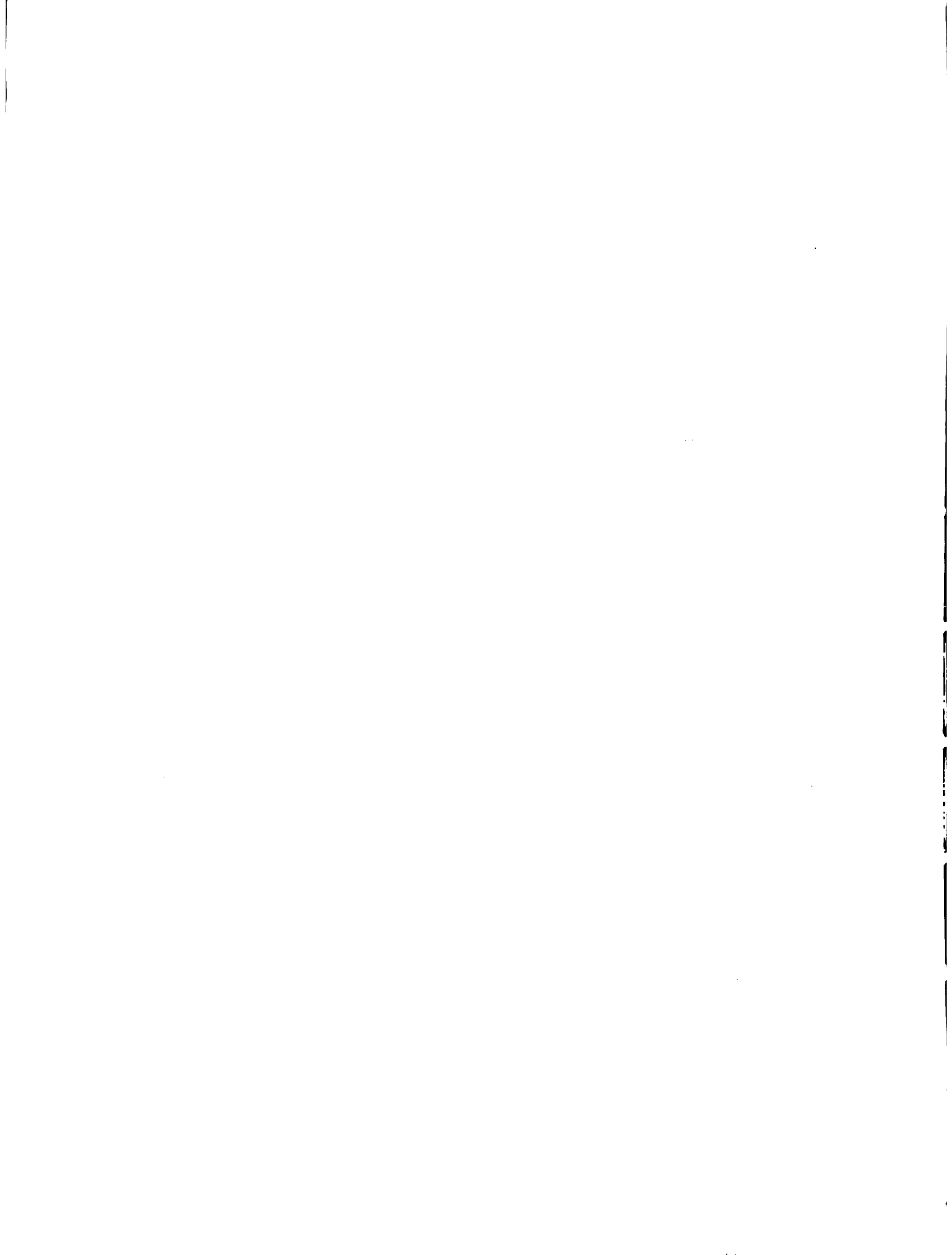
L'expérience de Couette permet de déterminer C, e, r, h, W d'où l'on tire μ

L'unité de Viscosité est la Poise du nom du médecin français Poiseuille qui a découvert les lois de Poiseuille en écoulement laminaire. La Poise est la Viscosité d'un liquide dans laquelle une variation de vitesse de 1cm/s par centimètre dans la direction normale provoque une force de tension tangentielle de 1 dyne/cm²

$$\mu \text{ a pour dimension } M L^{-1} T^{-1}$$

Dans les fluides en mouvement, le coefficient de Viscosité μ intervient généralement avec le terme ρ masse spécifique sous la forme $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ que l'on appelle Viscosité Cinématique.

Les dimensions de $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ sont donc $L^2 T^{-1}$. On exprime ν en cm²/s dans le système CGS ou stokes.



Écoulement laminaire entre deux plaques planes parallèles

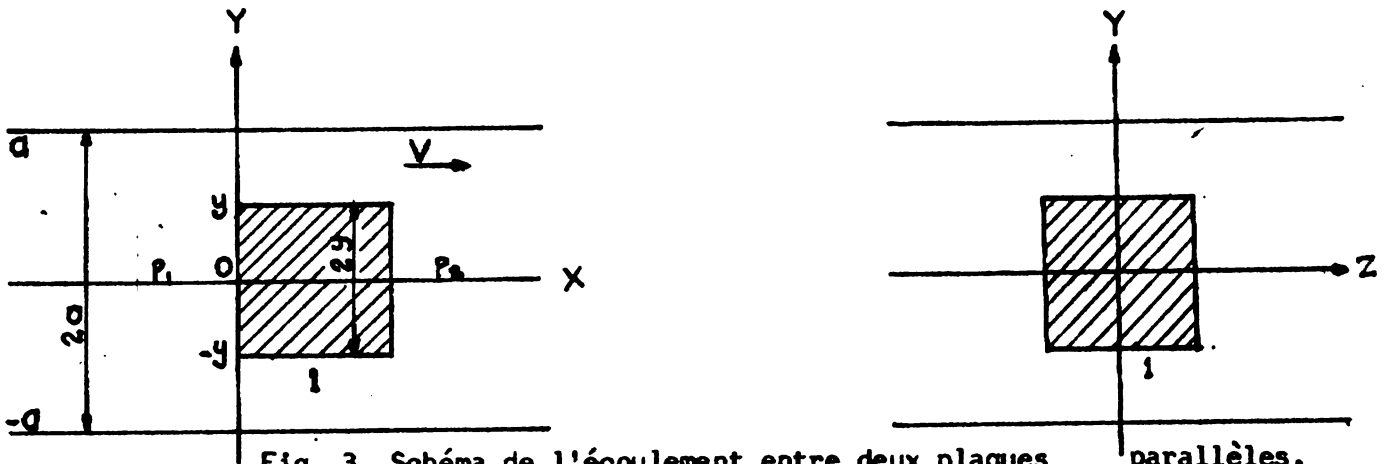


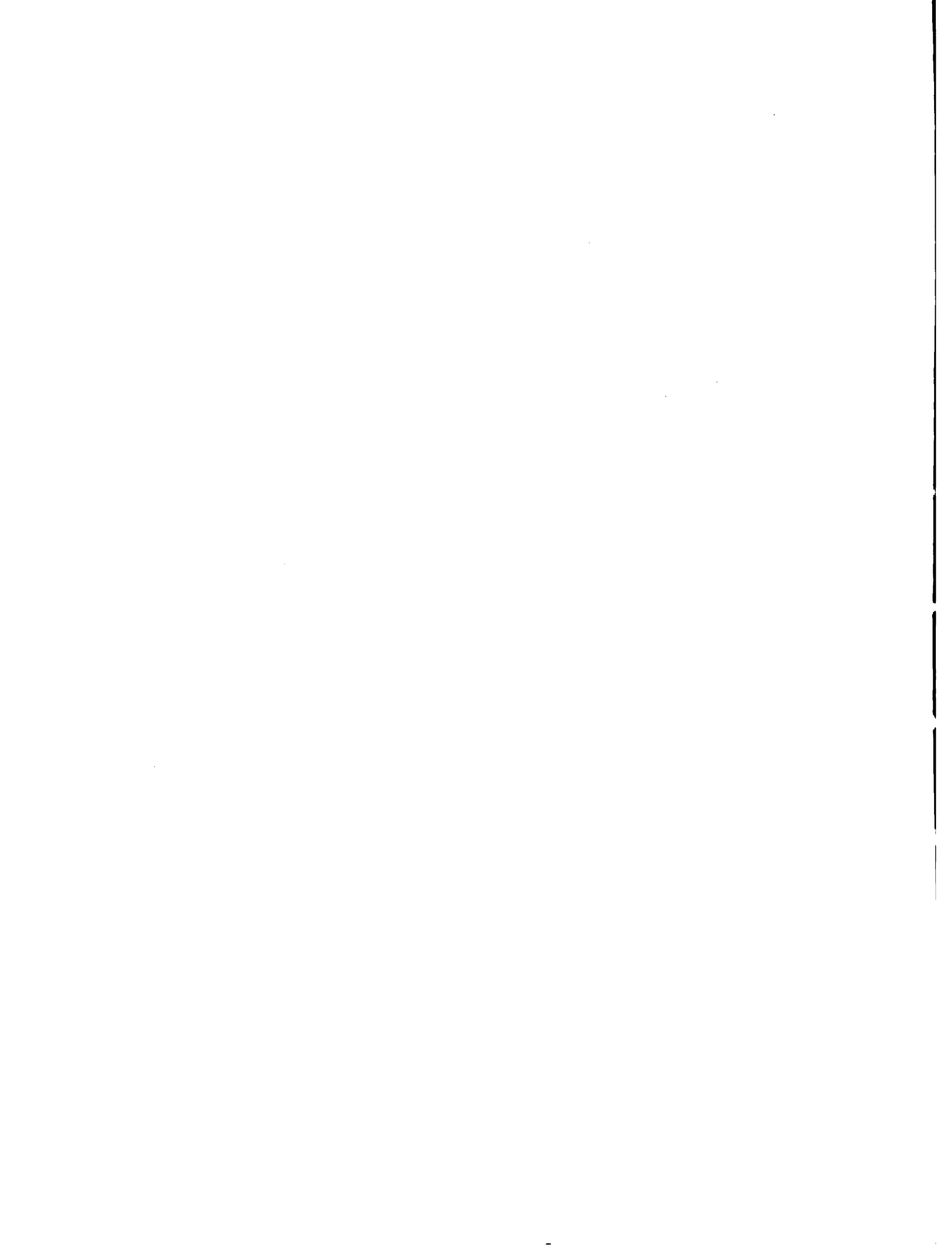
Fig. 3 Schéma de l'écoulement entre deux plaques parallèles.

Nous avons deux plaques planes parallèles espacées de $2d$, entre lesquelles circule un fluide de Viscosité Dynamique μ en un mouvement uniforme.

Choisissons un origine de coordonnées sur l'axe OX de l'espace intermédiaire dirigé suivant la direction de l'écoulement; l'axe OY perpendiculairement aux plaques et l'axe OZ perpendiculaire au plan XOY . Découpons dans le liquide en mouvement, un parallélépipède de dimension l suivant OX ; $2Y$ suivant OY et 1 suivant OZ .

Faisons les hypothèses suivantes:

- 1) L'écoulement se fait par lames dans le sens de l'axe OX
Il n'y a pas de mouvements transversaux
- 2) Le mouvement est uniforme, il n'y a pas d'accélération dans le sens de l'axe OX .



Ce qui permet d'écrire:

$$(p_1 - p_2) (2Y \times 1) = -\cancel{\mu} \frac{dV}{dY} \times 2(1 \times 1)$$

$$(p_1 - p_2) 2Y = -2\cancel{\mu} \frac{dV}{dY}$$

En séparant les variables

$$(p_1 - p_2) 2Y dY = -2\cancel{\mu} dV$$

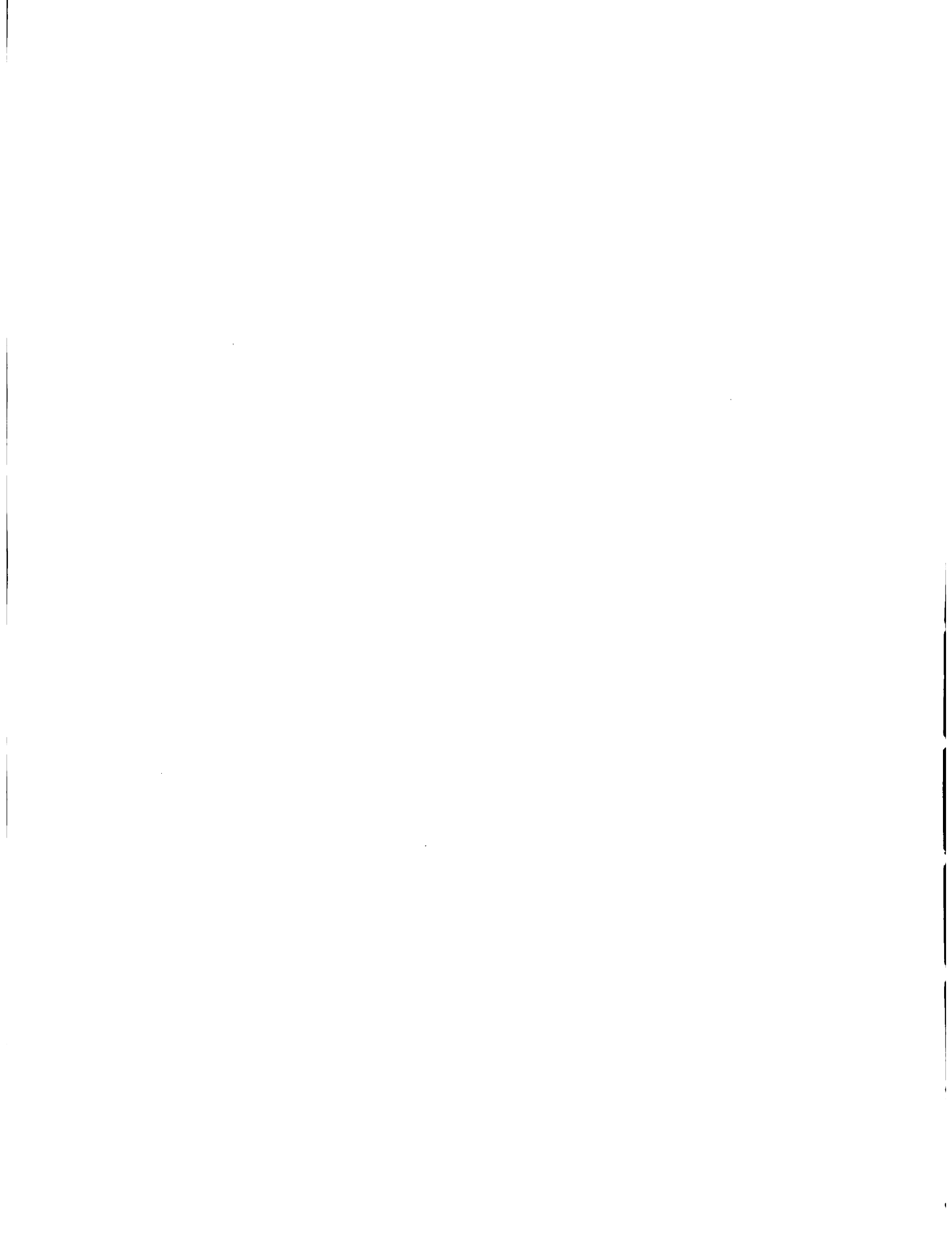
$$-\frac{p_1 - p_2}{\cancel{\mu}} Y dY = dV$$

$$V = -\frac{p_1 - p_2}{\cancel{\mu}} \cdot \frac{Y^2}{2} + C$$

Pour $Y = \frac{+}{-} a$ ou a $V = 0$

d'où:

$$C = + \frac{p_1 - p_2}{2\cancel{\mu}} a^2$$



Ce qui donne en définitive pour V

$$V = \frac{p_1 - p_2}{2\mu} (-Y^2 + a^2)$$

Le profil des vitesses est donc parabolique.

La vitesse maximale a lieu sur l'axe pour $Y = 0$. Elle est égale à:

$$V_{\max.} = + \frac{p_1 - p_2}{2\mu} a^2$$

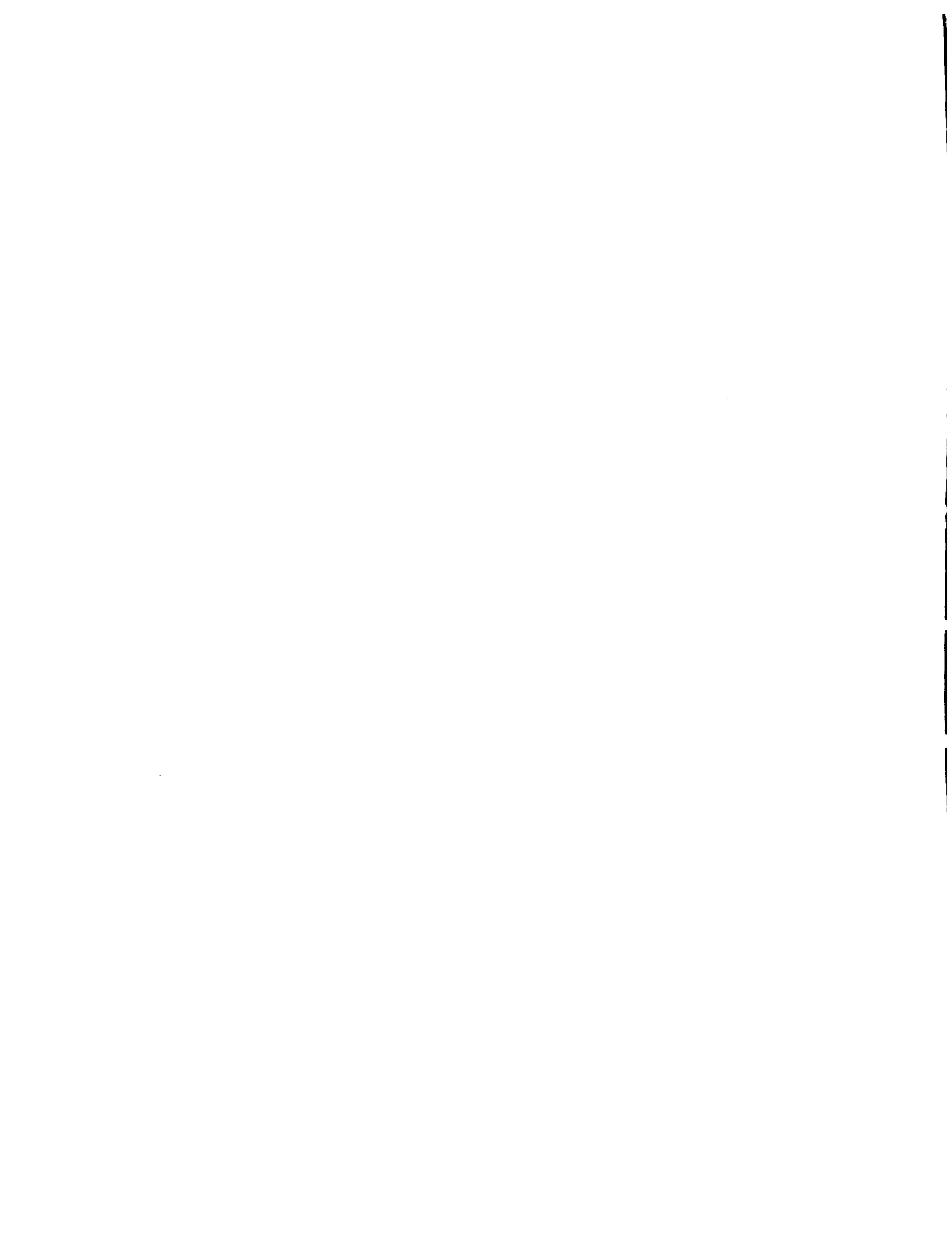
Calcul du débit:

Le débit élémentaire dQ pour une surface élémentaire $dS = dY \times l$ est:

$$dQ = VdS = \frac{p_1 - p_2}{2\mu} (-Y^2 + a^2) dY$$

$$Q = 2 \int_0^a \frac{p_1 - p_2}{2\mu} (-Y^2 + a^2) dY$$

$$= 2 \frac{p_1 - p_2}{2\mu} \left(-\frac{Y^3}{3} + a^2 Y \right)_0^a = 2 \frac{p_1 - p_2}{2\mu} \left(-\frac{a^3}{3} + a^3 \right)$$



$$Q = + \frac{2 (P_1 - P_2) a^3}{3\mu}$$

La vitesse moyenne est : $V_m = \frac{Q}{S}$

$$S = 2a$$

$$V_m = + \frac{2(P_1 - P_2) \times a^3}{3\mu \times 2a}$$

$$V_m = + \frac{P_1 - P_2}{3\mu} a^2$$

Écoulement laminaire dans un tuyau circulaire

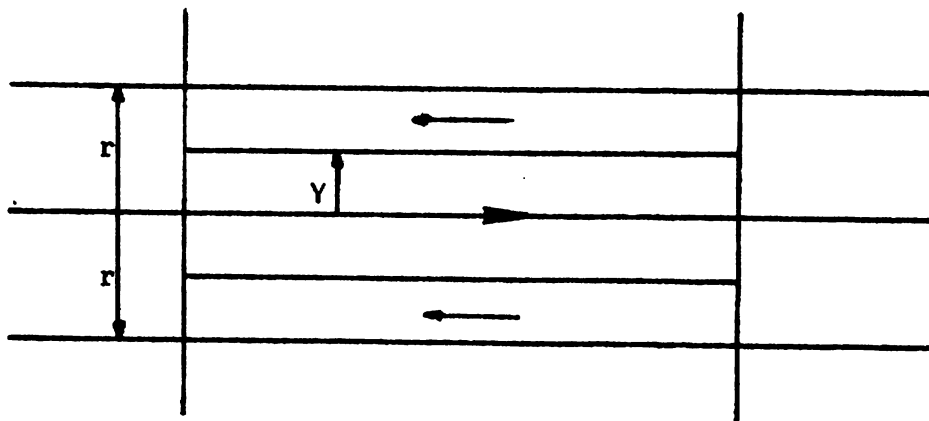


Fig. 4 - Schéma pour la visualisation de l'écoulement laminaire dans un tuyau circulaire.



Considérons un tuyau circulaire et horizontal de diamètre $2r$. Soient 2 sections S_1 et S_2 espacées de l . Soit p la pression en S_1 et p_2 la pression en S_2 . Le débit est constant ainsi que le diamètre, le mouvement du liquide est donc un mouvement uniforme. Considérons un cylindre élémentaire de liquide de rayon Y se déplaçant à l'intérieur du tuyau d'un mouvement également uniforme.

- Les forces agissant sur le cylindre élémentaire sont:
la pression aux deux extrémités: $(p_1 - p_2) \pi Y^2$
- Les réactions sur la surface latérale qui s'opposent au déplacement: $-2\pi Y l \tau$
- Le poids du cylindre (étant vertical, se projette en nul sur l'horizontal)

Ecrivons en projection sur l'axe horizontal du tuyau que le mouvement est uniforme; c'est-à-dire que la somme des projection, des forces agissant sur le cylindre est nulle:

$$(p_1 - p_2) \pi Y^2 - 2\pi Y l \tau = 0$$

$$\tau \text{ est donné par } \mu \frac{dv}{dY}$$

On aura:

$$(p_1 - p_2) \pi Y^2 + 2\pi Y l \mu \frac{dv}{dY} = 0$$

En divisant πY et en séparant les variables

$$dv = - \frac{p_1 - p_2}{2\mu l} Y dY$$

$$v = \frac{p_1 - p_2}{2\mu l} \frac{Y^2}{2} + C$$

$$v = 0 \quad ; \quad Y = r$$



D'où
$$C = \frac{P_1 - P_2}{4\mu l} r^2$$

En définitive:

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\mu l} (r^2 - Y^2)$$

Ainsi donc la vitesse dans un écoulement laminaire dans un tuyau circulaire se répartit suivant une loi parabolique.

La vitesse maximale a lieu à l'axe pour $Y = 0$ et a pour valeur:

$$v_{\max.} = \frac{P_1 - P_2}{4\mu l} r^2$$

Écoulement turbulent

Lorsque le nombre de Reynold's est supérieur à 2 000, l'écoulement change de caractère, il se produit un brassage des couches voisines. Les molécules passent d'une couche à l'autre sans aucune ordre. Elles heurtent les aspérités des parois et sont renvoyées dans toutes les directions traversant la masse liquide dans tous les sens. C'est le type de presque tous les écoulements courants que nous observons. Disons que l'écoulement laminaire est l'exception et l'écoulement turbulent la règle. L'écoulement laminaire est le type qui se produit pour des écoulements à faible épaisseur ou dans les cas où des liquides exceptionnellement visqueux circulent dans des conduites de petits diamètres. Dans tous les cas où il s'agit de mouvement de grandes quantités d'eau l'écoulement est turbulent.



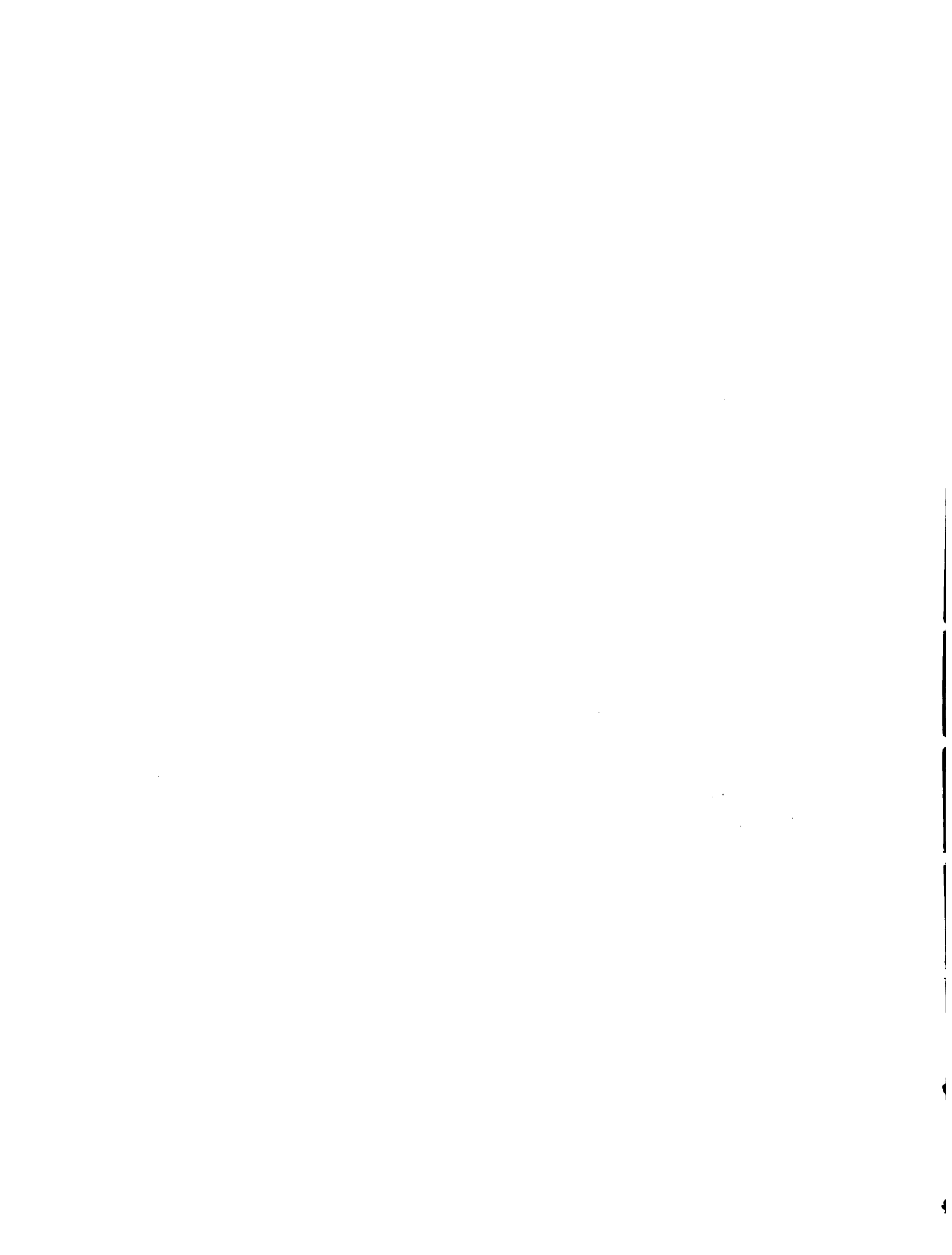
Turbulence

Le processus de passage du laminaire stable au turbulent instable est très connu. L'agitation instable des molécules qui caractérise la turbulence et que l'expérience de Reynold's n'a fait qu'accentuer l'évidence, à favoriser l'imposition de l'idée que "la régularité apparente de beaucoup de phénomènes recouvre une irrégularité fondamentale mais de pulsation rapide que la durée de persistance des impressions visuelles (1/20^e de seconde) nous empêche de voir.

Traitant de la turbulence, Boussinesq déjà en 1877 a eu l'idée de considérer l'écoulement turbulent comme la superposition de deux écoulements.

- Un écoulement de base, moyen qui donne un débit total régulier
- Des mouvements secondaires, tourbillonnaires et transversaux qui partent de n'importe quel point de la masse liquide et n'obéissent que à la loi du hasard. D'ou les considérations statistiques de Boussinesq sur la turbulence.

Ces considérations ont amené Boussinesq à se faire l'idée que la vitesse vraie en un point varie constamment dans le temps, mais avec des variations très rapides ou pulsations, en sorte que si l'on fait la moyenne des vitesses vraies pendant un temps T assez long par rapport aux temps de variations on obtient une vitesse moyenne constante. Enregistrant avec un aménomètre à fil chaud les pulsations de la vitesse dans le temps, on obtient la courbe irrégulière de la figure, qui oscille de façon désordonnée autour de la valeur moyenne de la vitesse.



Distribution de la vitesse en régime turbulent

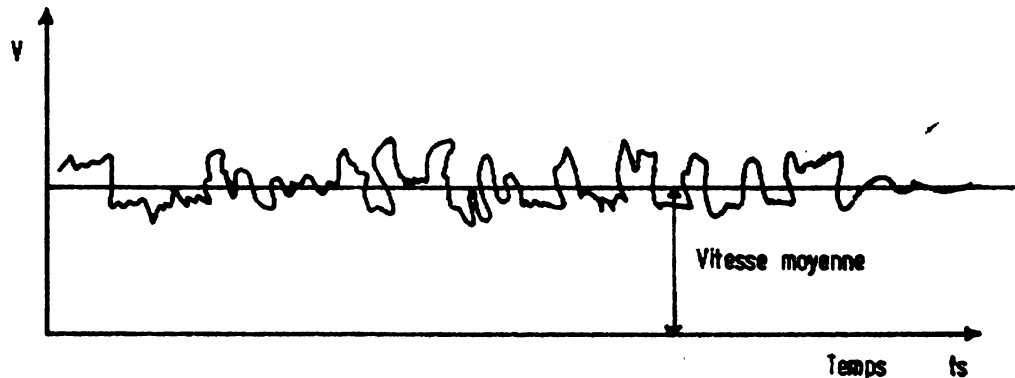
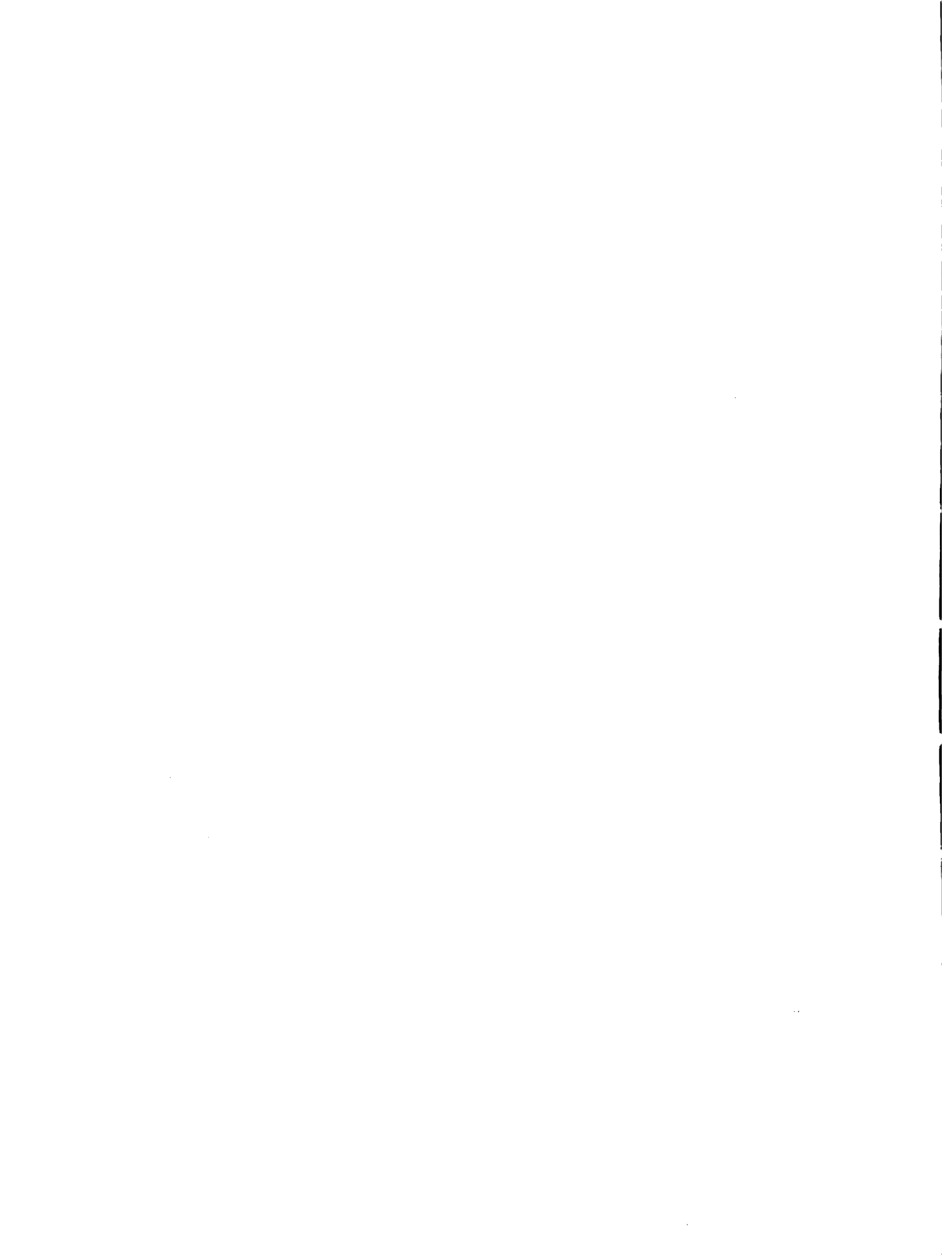


Fig. 5 Pulsation de la vitesse dans un courant turbulent

Dans la répartition des vitesses dans une section de l'écoulement, il apparaît une différence marquée entre le profil des vitesses de l'écoulement laminaire et de l'écoulement turbulent. Pour l'écoulement laminaire le profil des vitesses est une parabole, avec la valeur maximale à l'axe. Pour l'écoulement turbulent le profil des vitesses est plus aplati. Le mélange des couches provoqué par les tourbillons, les fluctuations transversales des vitesses tendent à égaliser les vitesses dans la section transversale. Le rapport de la vitesse maximale à la vitesse moyenne dans le laminaire est de 2 alors que ce rapport n'est plus que de 1.20 dans le turbulent.

Notion de vitesse moyenne

Nous venons de voir que la vitesse vraie en un point varie constamment tout en restant autour d'une certaine valeur V que nous pouvons appeler vitesse en un point à l'instant t . De plus nous savons que la valeur de cette vitesse pour une section transversale n'est



pas la même pour toute la section. Si donc nous avons besoin de trouver un élément quelconque de l'écoulement, tel le débit par exemple, il nous faudrait passer par le débit élémentaire d'un élément de surface de la section:

$dQ = V \cdot ds$ et intégrer dans toute l'étendue de la surface pour avoir le débit.

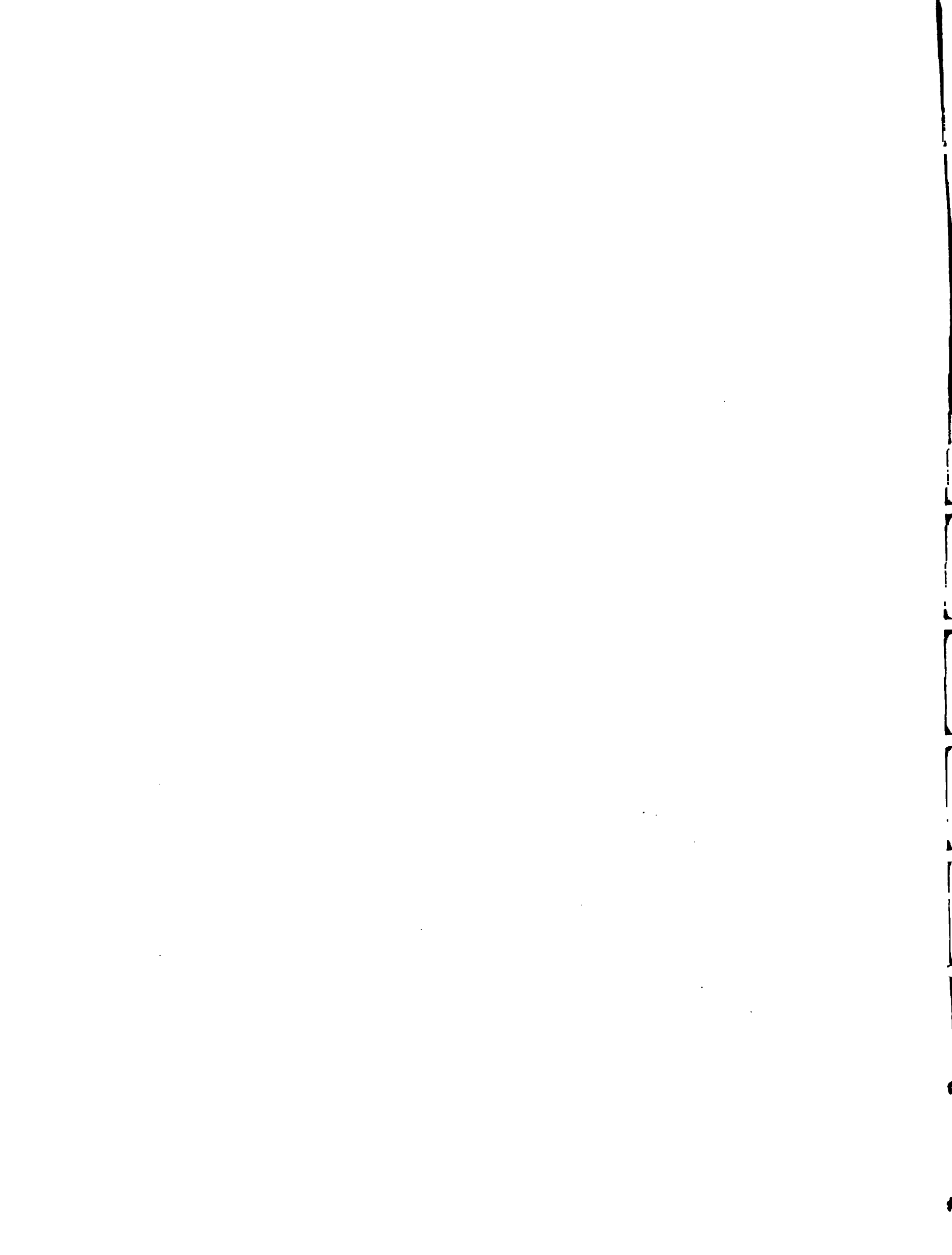
$$Q = \int_S V \cdot ds$$

Ce mode de procédé est bon mais n'est pas toujours commode. Il serait plus simple dans certains cas si on pouvait avoir une valeur qui appliquée à la surface nous donne le débit Q . C'est ce que l'on fait en remplaçant les vraies vitesses des éléments par une vitesse moyenne V que l'on déterminera par:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{\int_S nV \cdot ds}{S}$$

Cette valeur nous permet d'avoir un élément comme le débit, mais pour d'autres calculs il y a lieu d'agir avec prudence.

Ainsi les théorèmes de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique sont très utilisés en hydraulique. Ces théorèmes font entrer la vitesse à la puissance 2 et si nous prenons en considération que: le carré de la moyenne n'est pas égale à la moyenne des carrés nous admettons, et ce qui est vrai, que la valeur trouvée en utilisant la moyenne est différente de la quantité donnée par les vraies valeurs. On remédie à cela en adjoignant aux quantités calculées avec les vites-

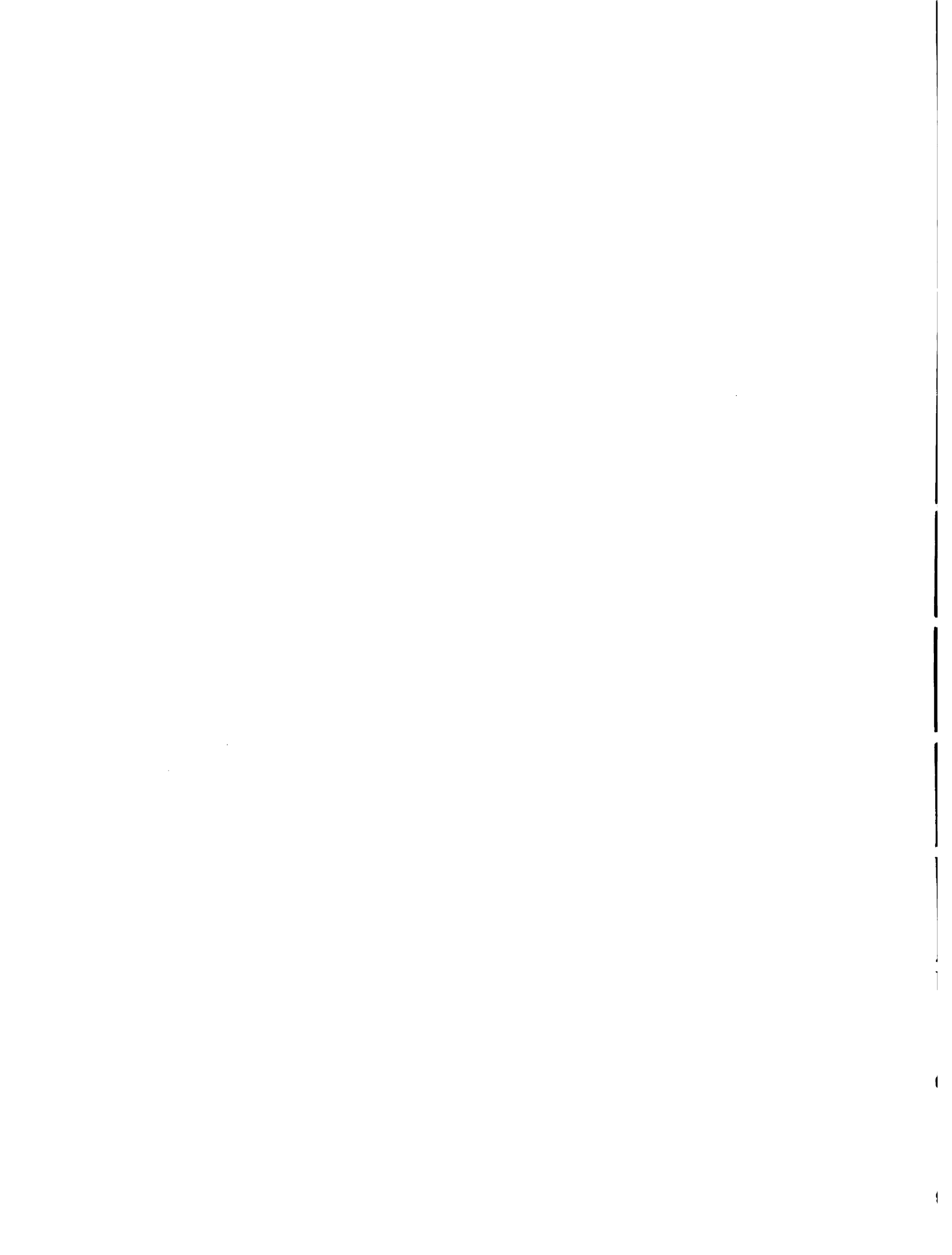


ses moyennes un coefficient correcteur.

Ainsi au lieu de $\frac{v^2}{2g}$ on aura $\alpha \frac{v^2}{2g}$

Au lieu de $Q V$ on aura $\beta Q V$

α et β étant des coefficients qui dépendront de la nature du problème.



CHAPITRE II

ÉCOULEMENT A SURFACE LIBRE

L'écoulement à surface libre présente une surface libre en contact avec l'atmosphère et soumise à la pression atmosphérique. La ligne piézométrique dans un écoulement à surface libre correspond à la surface libre, sauf pour les cas où la surface libre serait courbée et où la pente du canal serait très forte, c'est-à-dire supérieure à 10%.

Surface libre = ligne piézométrique

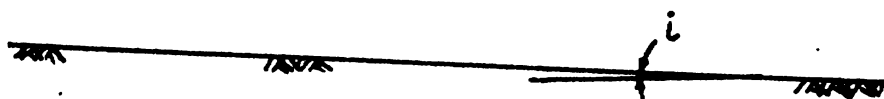
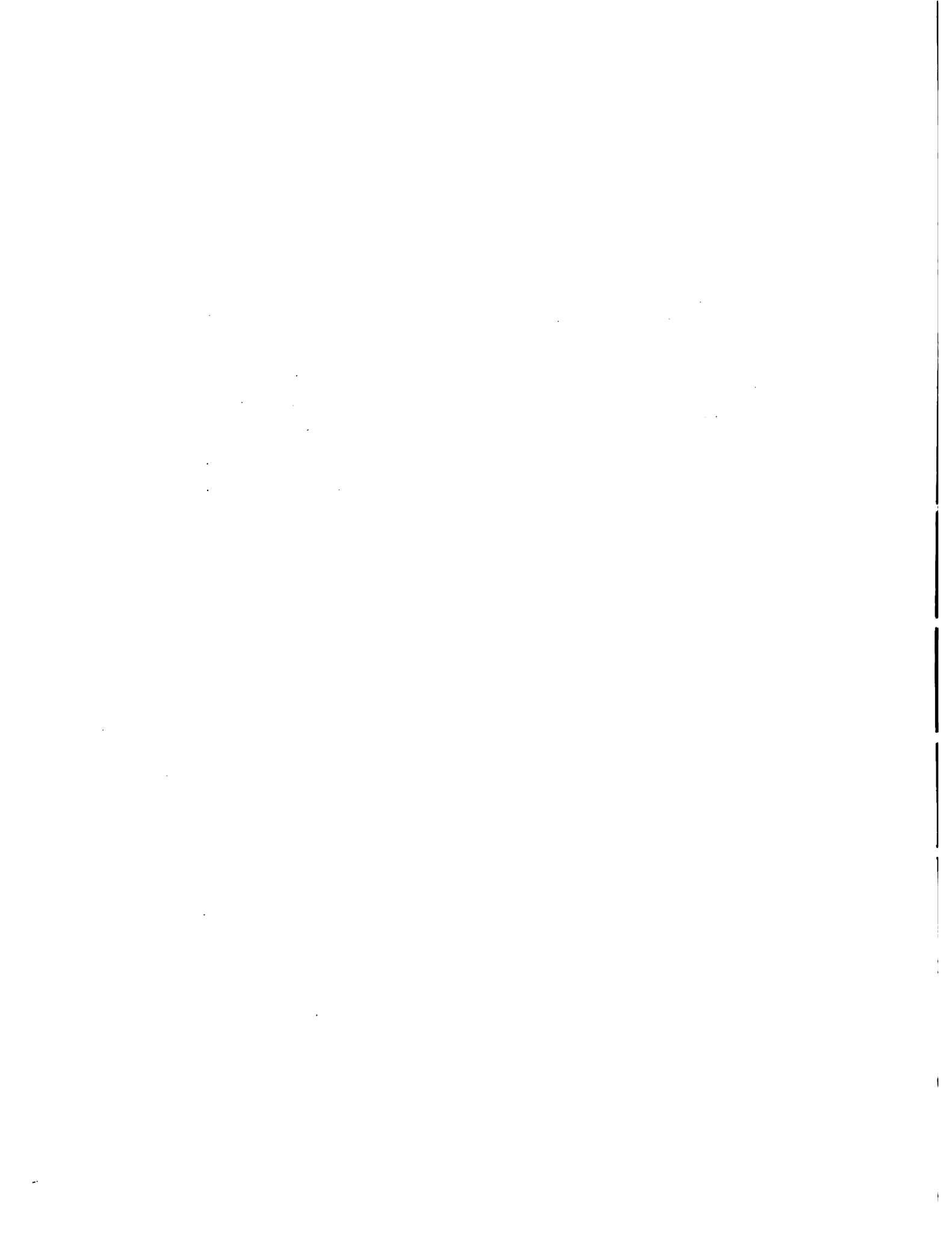


Fig. 6- Schéma de l'écoulement à surface libre.

Nous traiterons de l'écoulement à surface libre en régime permanent qui peut se présenter sous deux aspects:

- Le régime permanent uniforme, lorsque la section transversale, le débit, la vitesse sont constants tout le long du parcours.
- Le régime permanent varie, lorsque les éléments mentionnés précédemment ne sont pas constants.



Répartition des vitesses dans la section transversale

A cause de la surface libre et des parois, la vitesse dans la section transversale d'un écoulement à surface libre n'est pas uniforme. Le long d'une verticale, la vitesse maximale n'est pas à la surface libre mais à une distance comprise entre 0.05 et 0.25 la profondeur du courant. Plus on se rapproche des parois, plus profondément se rencontre la vitesse maximale.

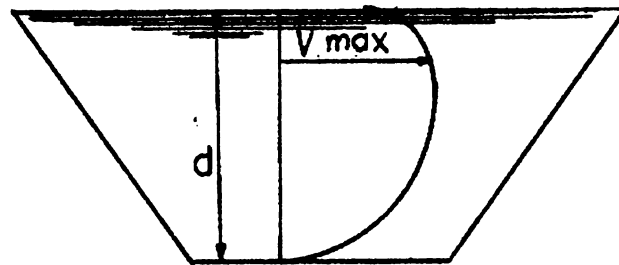


Fig. 7 - Distribution de la vitesse dans un canal trapézoïdal.

Si la section transversale est une section symétrique le long d'une ligne horizontale la courbe de répartition des vitesses sera symétrique par rapport à l'axe de la section.

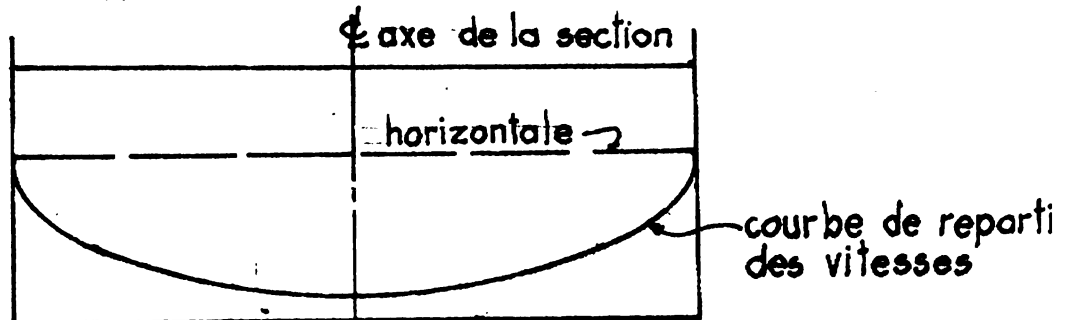


Fig. 8- Distribution de la vitesse dans un canal rectangulaire.

La vitesse moyenne est mesurée à environ 0.6 de la profondeur ou si l'on veut plus de précision, on prend la moyenne des vitesses mesurées à 0.2 et 0.8 de la profondeur sur la verticale.



Distribution de pression dans la section transversale

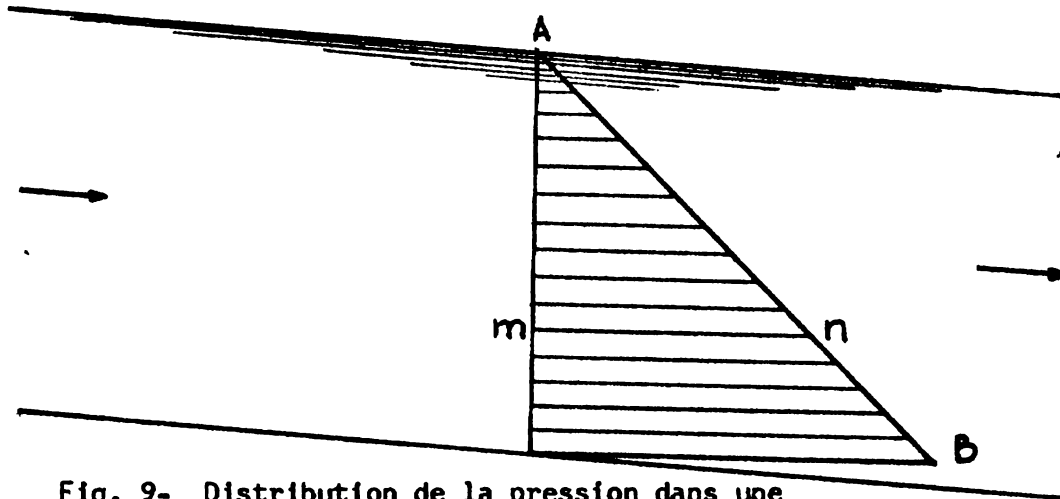
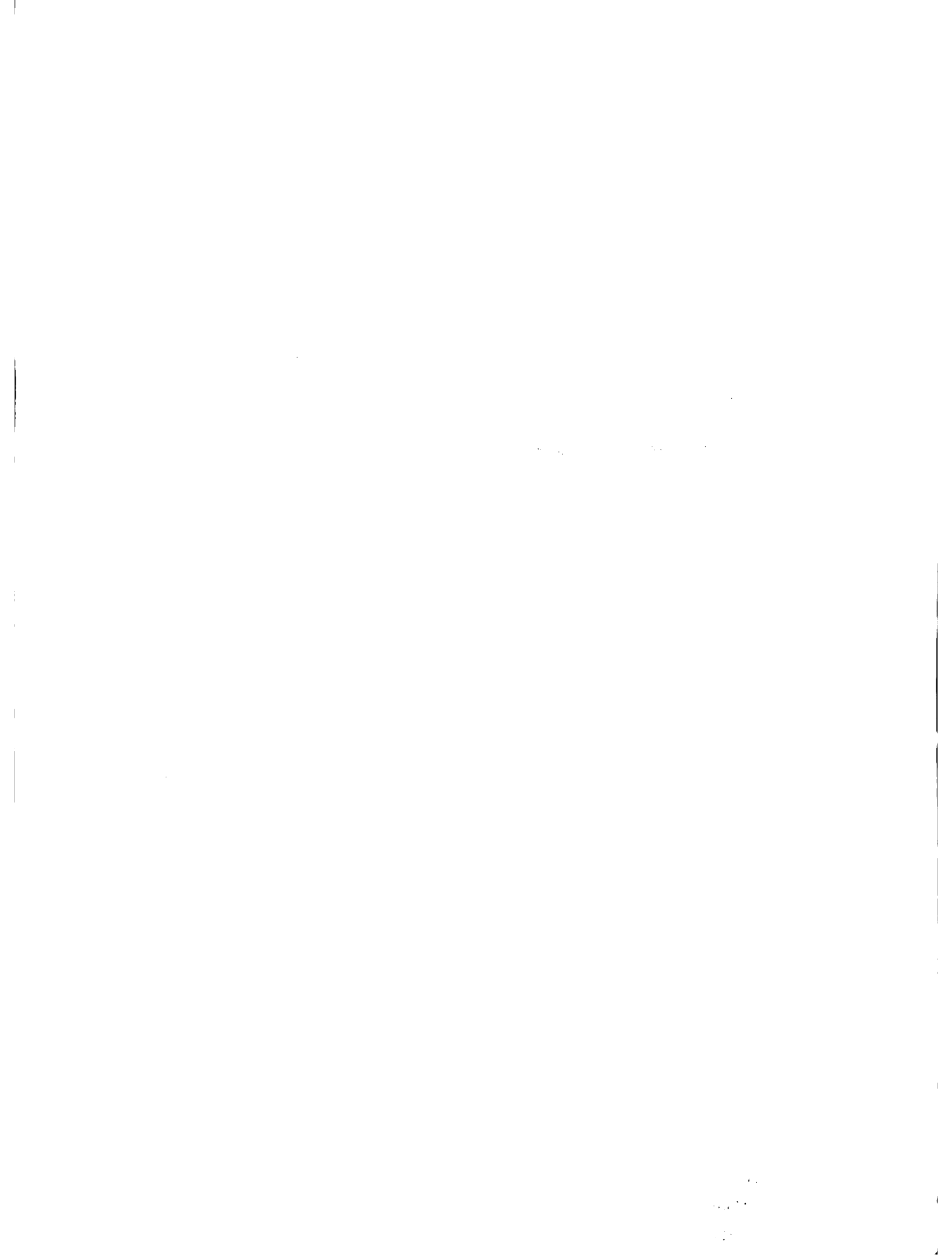


Fig. 9- Distribution de la pression dans une section transversale.

La pression en un point de la section transversale d'un écoulement peut se mesurer par la hauteur de la colonne de liquide dans un piézomètre placé en ce point. Pour un écoulement à filets parallèles ou très peu obliques ou courbes pour qu'on puisse les considérer comme parallèles, la pression est hydrostatique. Ainsi la pression en un point quelconque de la section est directement proportionnelle à la profondeur de ce point sous la surface libre.

La répartition de la pression est donc linéaire et est représentée par la ligne droite AB. Par exemple la pression au point m est représentée par mn.

Si l'écoulement se fait par filets curvilignes dans le plan vertical suivant la direction du flot, on dit que l'on a un écoulement curviligne qui peut être convexe ou concave. Dans ce cas la force centrifuge produite par la courbure de la trajectoire s'ajoute ou se retranche à la colonne piézométrique suivant que la courbe est concave ou



convexe. A la pression piézométrique AB du point il faut donc ajouter un terme correctif BB' qui représente le terme force centrifuge qui est fonction de rayon de courbure et de la vitesse de l'écoulement.

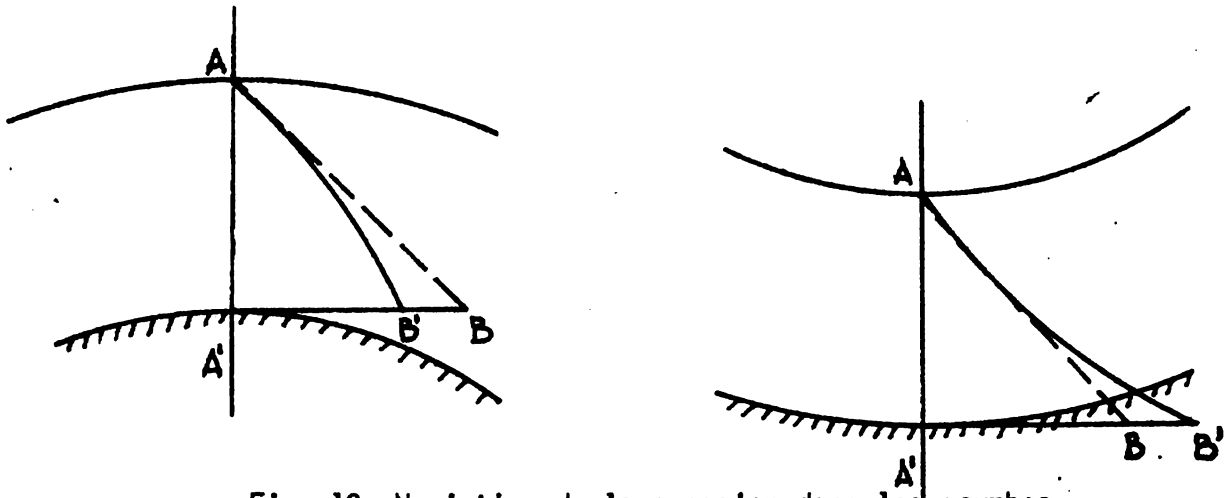


Fig. 10 Variation de la pression dans les courbes.

Pour un écoulement dont la trajectoire des filets présentent une pente par rapport à l'horizontale, la pression est fonction de cette pente.

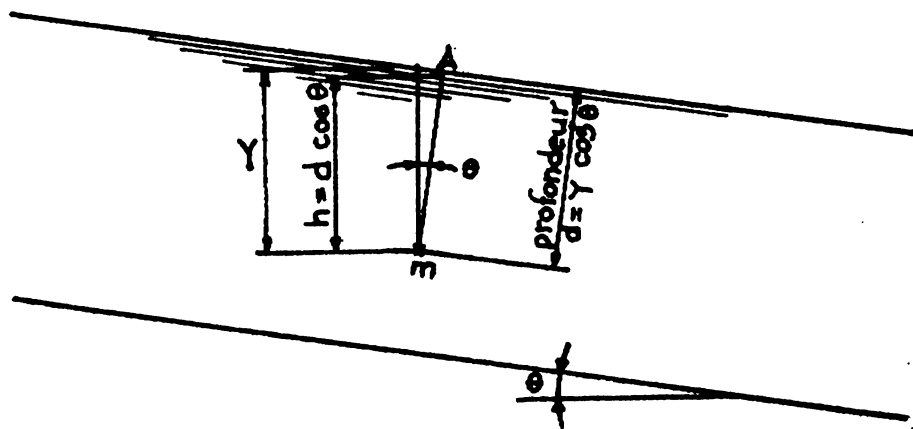
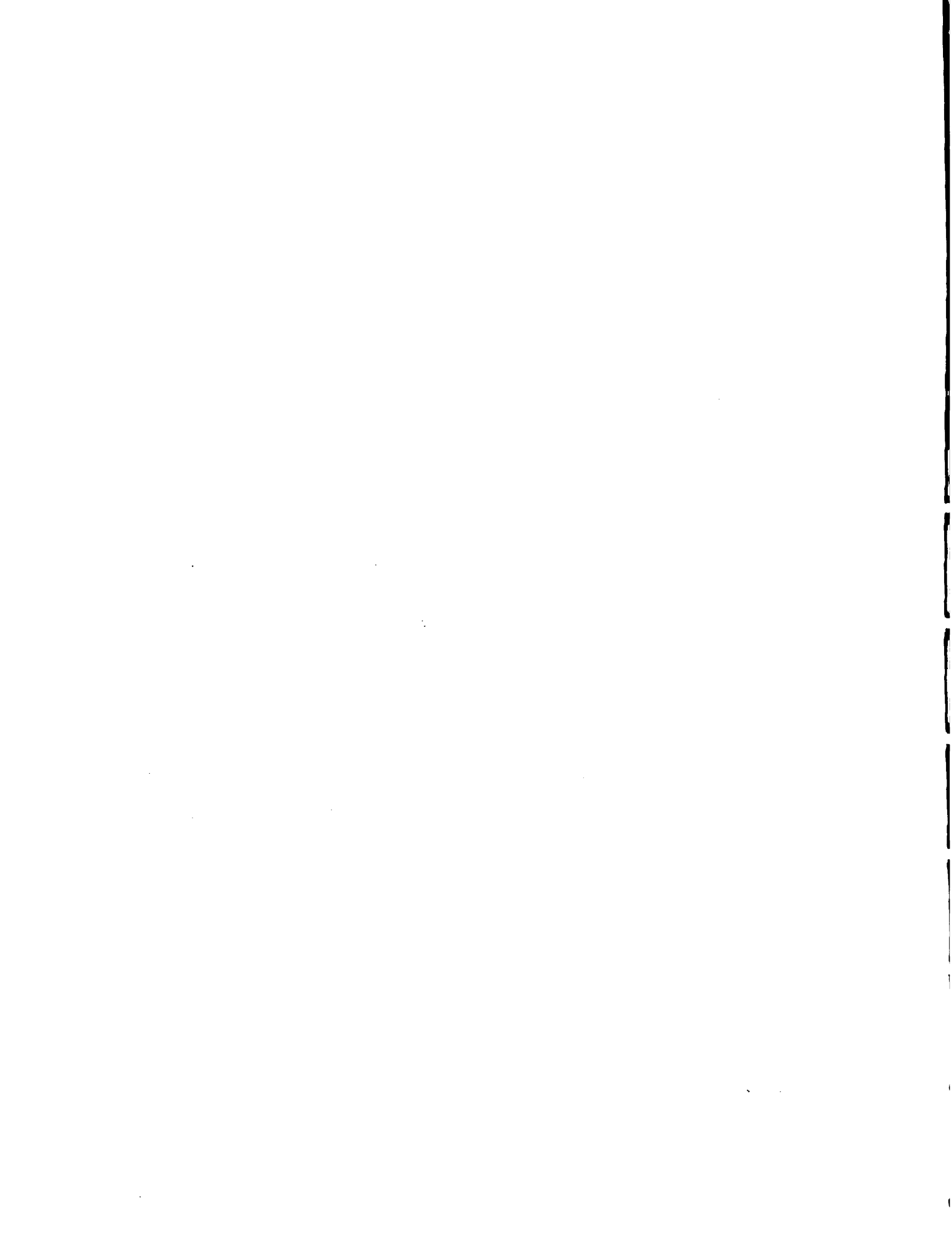


Fig. 11 - Effet de la pente sur le calcul de la pression.

La pression piézométrique du point m se mesure par la distance verticale y .



La profondeur de m sous la surface se mesure perpendiculairement à la surface par la distance $d = Y \cos$

La pression de m se mesure par la distance h verticale rabattement de d sur la verticale, elle est égale à:

$$h = d \cos \phi = Y \cos^2 \phi$$

La pression du point se mesure par la pression piézométrique corrigée par le coefficient $\cos^2 \phi$

Pour une pente inférieure à 10% ou 6° la correction peut bien être ignorée. Mais au delà de 10%, il faut faire la correction pour avoir une bonne précision.



CHAPITRE III

ÉCOULEMENT UNIFORME

Un écoulement permanent uniforme est caractérisé par le fait que la hauteur d'eau, la section mouillée, la vitesse et le débit restent constants tout le long de l'écoulement.

1- FORMULE GENERALE DE L'ÉCOULEMENT POUR UN CANAL DE SECTION TRANSVER-SAL CONSTANTE

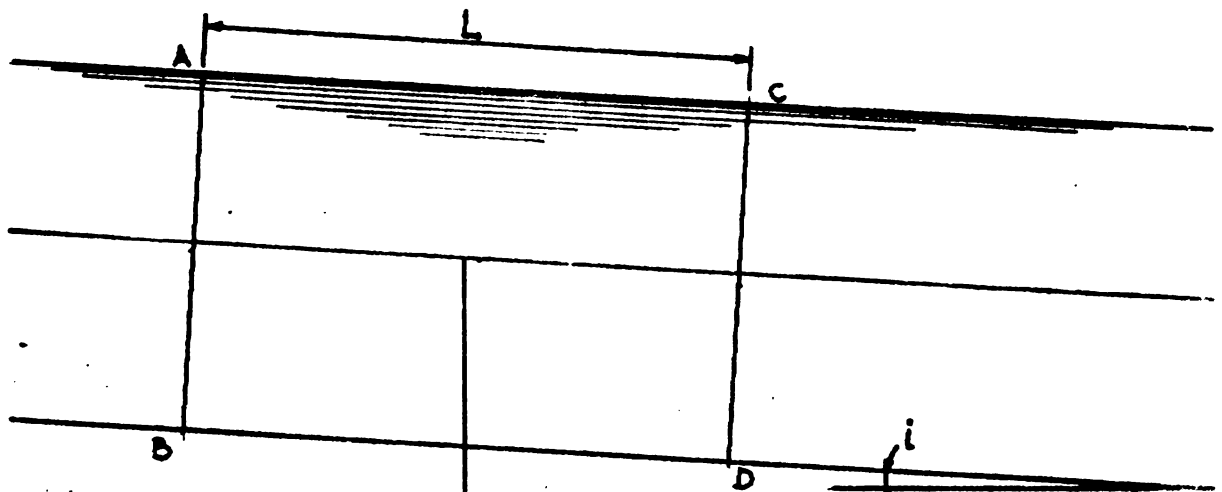
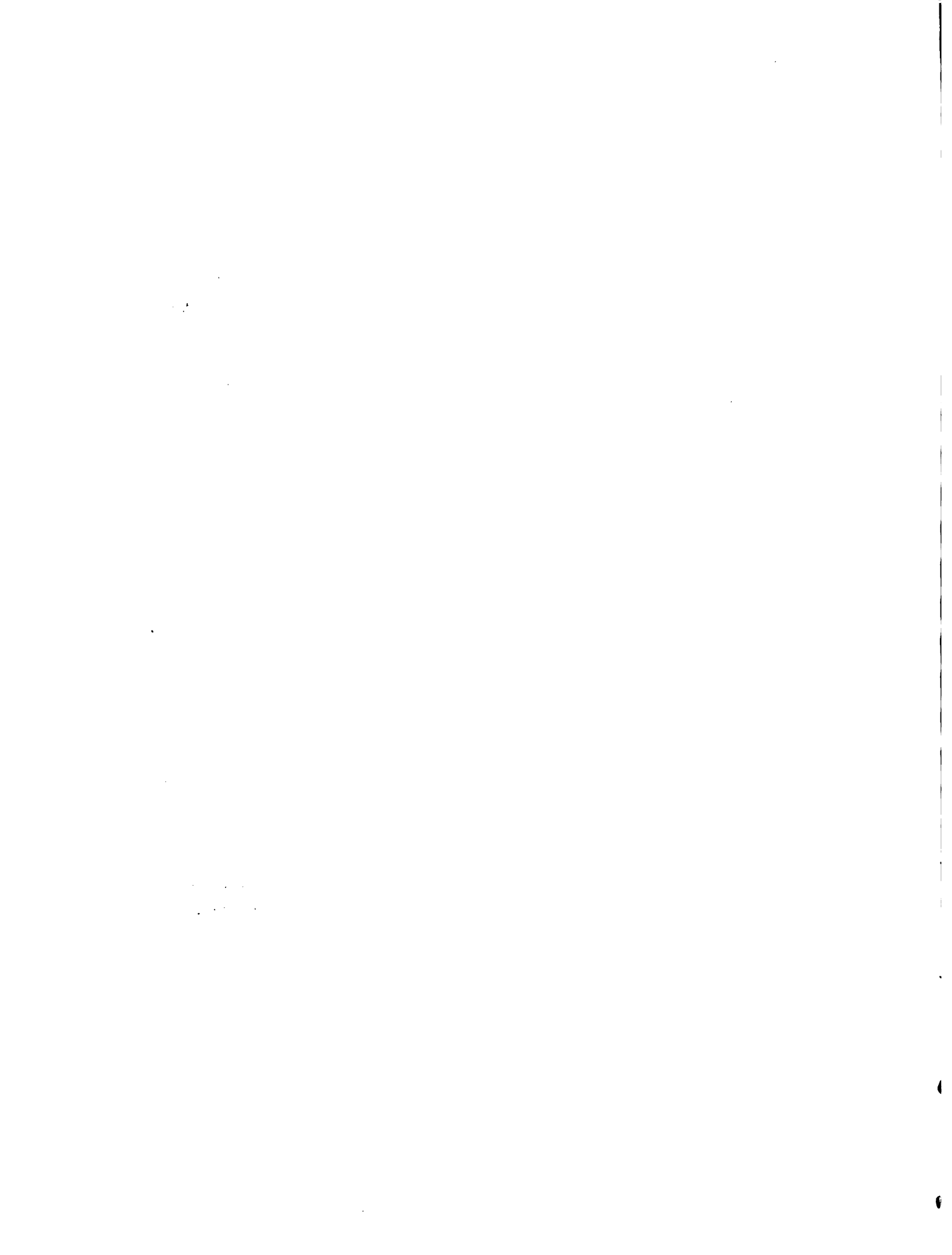


Fig. 12 Schéma pour la visualisation de l'écoulement uniforme.

Dans ce cas la ligne d'énergie, la ligne piézométrique ou la surface libre et le fond du canal sont parallèles.

Nous prenons deux sections AB et CD espacées de L , et nous considérons la masse liquide en mouvement rectiligne et uniforme entre les deux sections. Puisque le mouvement est uniforme la masse liquide en mouvement est en équilibre et la somme des forces qui agissent sur elle est donc nulle.



Ces forces sont:

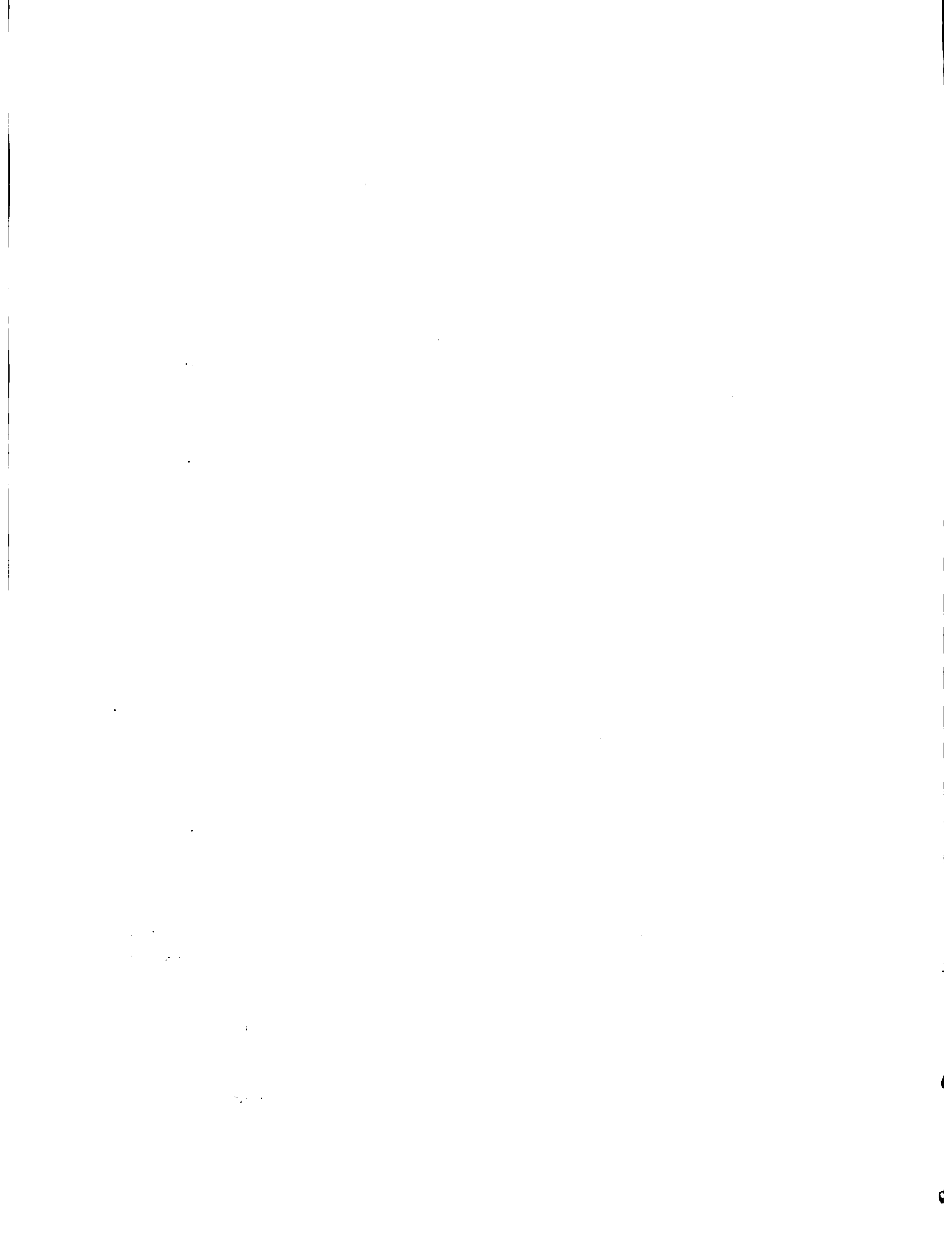
- Le poids de la masse liquide
- La pression sur la surface et les sections AB et CD
- Les forces de frottement

Nous allons considérer ces différentes forces en projection sur l'axe longitudinale du canal.

- Le poids c'est: $S L \gamma \sin i$
- La pression
 - 1) La pression atmosphérique normale à la surface libre donc à l'axe: projection nulle.
 - 2) Les pressions sur les faces AB et CD: elles sont égales la pression est hydrostatique et opposées donc somme de projections nulle.
- Les forces de frottement:
 - 1) Les forces de frottement intérieur qui s'annulent mutuellement par suite de l'égalité de l'action et de la réaction.
 - 2) Les forces de frottement sur la paroi qui sont proportionnelles à la surface de contact, à la vitesse moyenne et au poids spécifique γ

Soit en projection sur l'axe pour les frottements à la paroi : $-L P \gamma \phi (u)$

Le signe moins parce que ces forces s'opposent au mouvement; le terme $\phi (u)$ intègre les effets de la rugosité;



nature de paroi et autres paramètres.

On aura la relation:

$$S L \gamma \sin i - L P \gamma \phi(u) = 0$$

$$\frac{S}{P} \sin i = \phi(u)$$

Le rapport $\frac{S}{P}$ de la section mouillée au périmètre mouillé est appelé rayon hydraulique et est désigné par R . L'angle i étant petit on pose $\sin i = \operatorname{tg} i = I$ (pente du canal) puisque les lignes d'énergie et de fond sont parallèles.

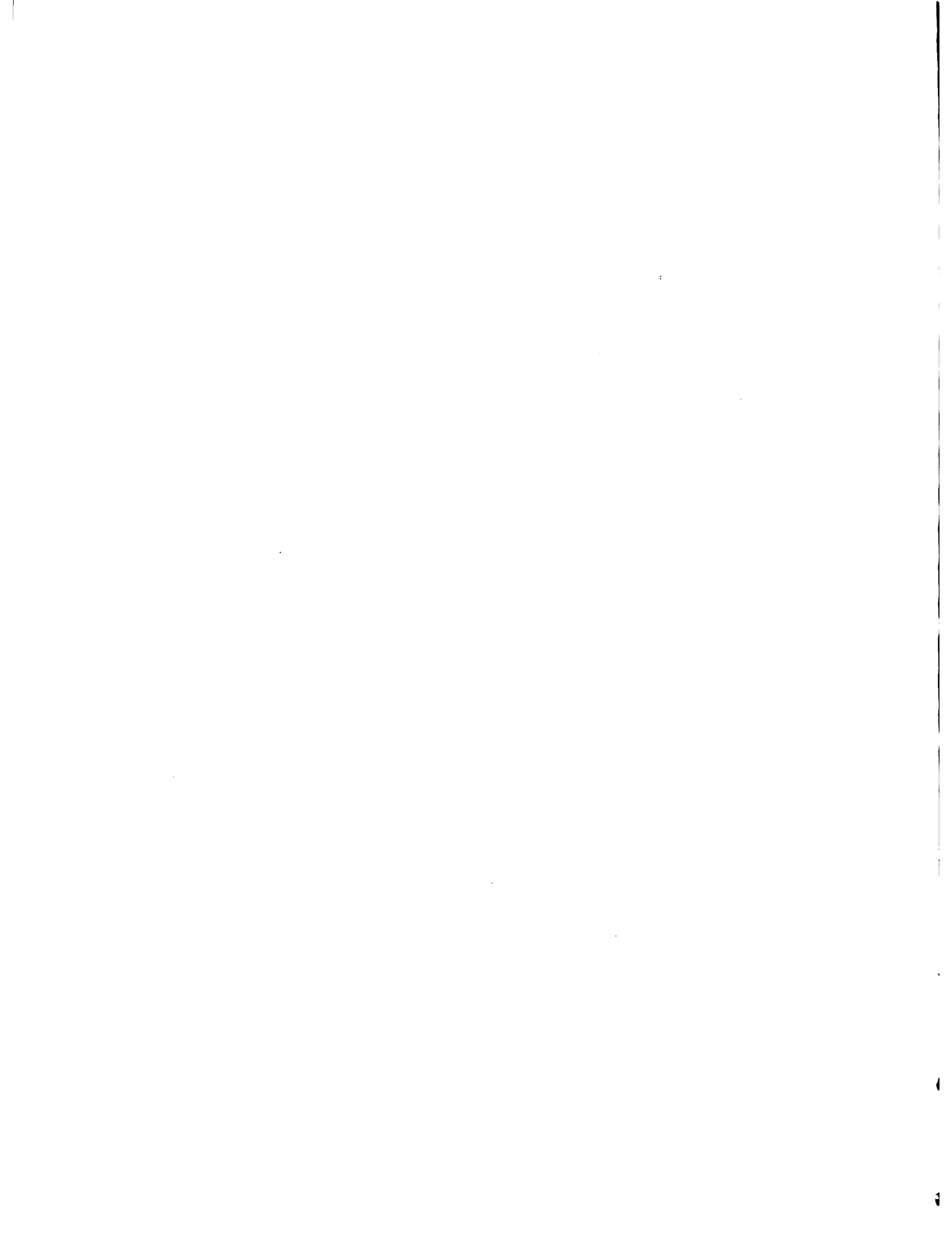
On pose de plus: $\phi(u) = \frac{v^2}{c^2}$

D'où : $RI = \frac{v^2}{c^2}$

Et en définitive:

$$v = c \sqrt{RI}$$

C'est la formule de Chezy qui a été établie aux environs 1775 par l'Ingénieur Antoine CHEZY. Dans cette formule C est un coefficient que de nombreux chercheurs, ingénieurs hydrauliciens, ont cherché à expliciter. D'où les diverses formules de calcul des canaux.



Formule de Bazin

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}}$$

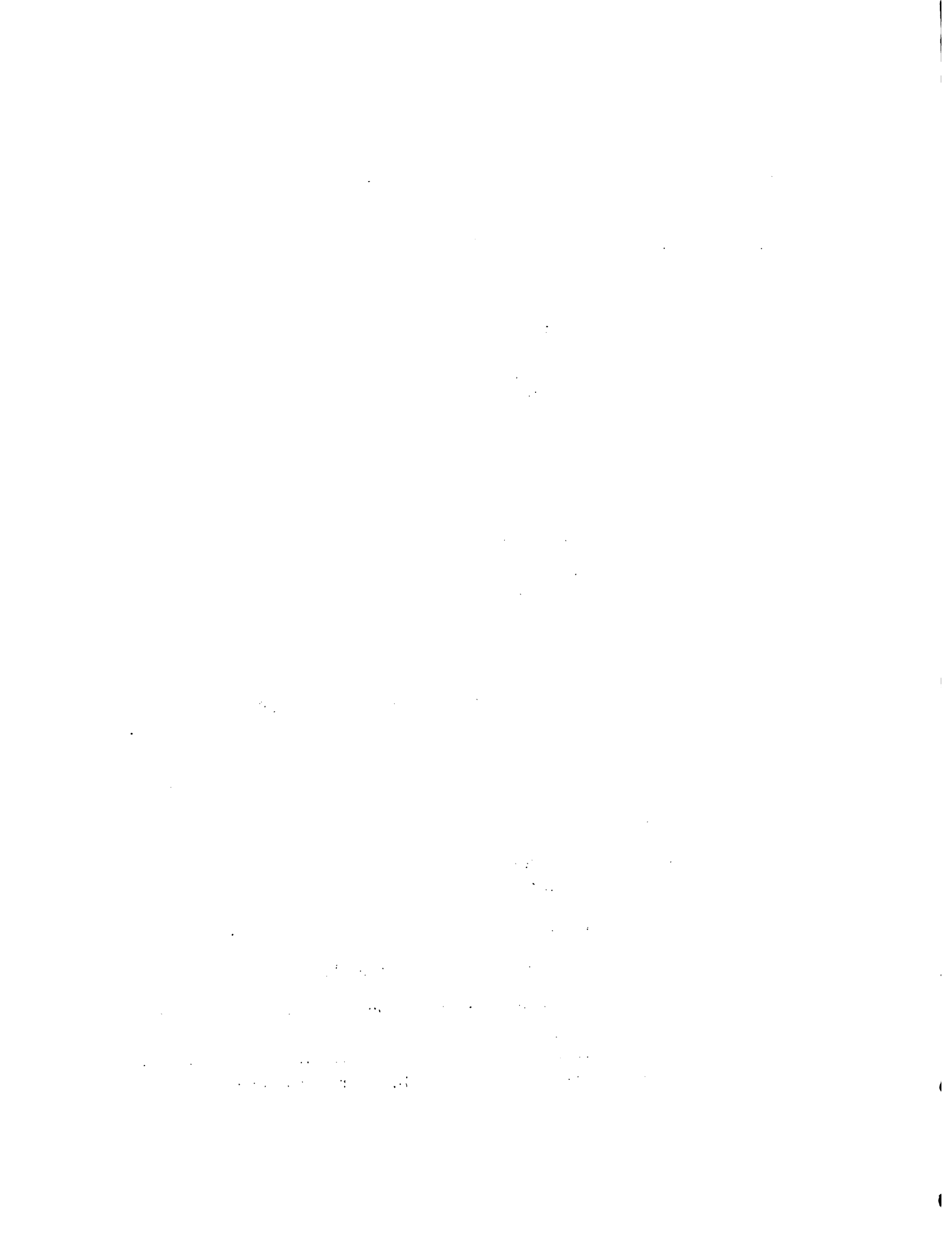
$$V = \frac{87 \sqrt{RI}}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}}$$

Les valeurs de m dépendent de la nature des parois

1) Parois très unies	$m = 0.06$
2) Parois unies	$m = 0.16$
3) Parois en maçonnerie de Moellons	$m = 0.46$
4) Parois mixtes: terres très régulières, revêtement de perrés	$m = 0.85$
5) Canaux en terre ordinaire	$m = 1.30$
6) Canaux en terre, fonds de galets, parois herbées	$m = 1.75$

Il existe des tables et des abaques permettant de calculer les canaux suivant la formule de Bazin.

Tableau 1 Les valeurs de m dépendant de la nature des parois.



Formule de Manning - Strickler

Robert Manning un irlandais a donné la formule suivante applicable à l'écoulement uniforme et permanent.

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2}$$

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}$$

Où:

R = Rayon Hydraulique (m)

I = La pente du canal

V = La vitesse moyenne de l'écoulement (m/s)

n = Un coefficient qui varie avec la nature des parois et du lit du canal

Strickler a essayé de déterminer la valeur du coefficient n de Manning en fonction de la dimension des matériaux qui constituent la paroi.

Il a posé

$$K = \frac{1}{n} = \frac{K'}{\sqrt[6]{D}}$$

D = diamètre des matériaux en mètre

La formule de Manning s'écrit sous la forme suivante:

$$V = K R^{2/3} I^{1/2}$$



Dénommée formule Manning-Strickler.

Des tables sont établies qui donnent les valeurs de n et de K suivant la nature et l'état des parois.

Applications à des cours d'eau naturels

Ces formules sont applicables aux cours d'eau naturels en donnant au coefficient C , m , K et n les valeurs correspondant à la catégorie du cours d'eau.

Ces valeurs sont données dans le tableau suivant:

En définitive, pour les cours d'eau naturels, on utilisera les formules de BAZIN ou de MANNING-STRICKLER en adoptant les coefficients du tableau suivant emprunté à PARDE:

No des catégories	C de CHEZY	$K = \frac{1}{n}$ de MANNING-STRICKLER	m de BAZIN
1	25 à 32	23 à 26	2,20 à 3
2	33 à 38	27 à 29	2 à 2,70
3	39 à 42	30 à 33	1.80 à 2.50
4	43 à 45	34 à 37	1.75 à 2.
5	46 à 48	38 à 40	1.50 à 1.80
6	49 à 52	41 à 42	1.10 à 1.70
7	50 à 55	43 à 45	1.20 à 1.50
8	56 à 65	46 à 50	1.40 à 1.50

Tableau 2 Valeurs des coefficients pour différentes catégories des parois des canaux.



Catégorie-types de rivières au point de vue de la rugosité

- 1 - Petits cours d'eau de montagne, à fond très irrégulier, largeur de l'ordre de 10 à 30 mètres.
- 2 - Cours d'eau de montagne, larges de 30 à 50 mètres, avec pentes supérieures à 0,002 et fond de gros graviers (par exemple 10 à 20 cm de diamètre pour beaucoup d'entre eux).
- 3 - Rivières de largeur comparable ou supérieure, à pente comprise entre 0,0008 et 0,002, avec fond de graviers dont le diamètre extrême en général ne dépasse pas 8 à 10 centimètres (Rhin à Bâle).
- 4 - Pente comprise entre 0,0006 et 0,0008, graviers de 4 à 8 centimètres (Rhône à Lyon).
- 5 - Même pente, mais cailloux plus petits (Rhône à la Porte de Scex, avant le Léman).
- 6 - Pente inférieure à 0,0006 et supérieure à 0,00025, cailloux très petits ou sable (Danube à Vienne).
- 7 - Cours d'eau peu turbulents, avec pentes de 0,00012 à 0,00025, fond de sable et de boue (Seine, Saône, Rhin inférieur).
- 8 - Très gros cours d'eau à très faible pente (moins de 0,00012 et fond très lisse (Volga, Danube hongrois, Mississippi inférieur).

Sections transversales composées ou hétérogènes

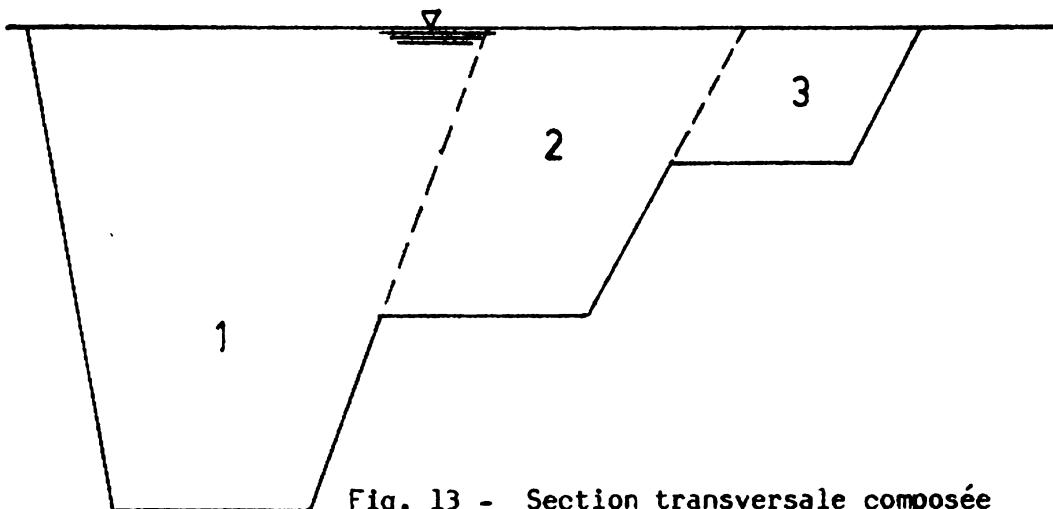


Fig. 13 - Section transversale composée



Dans le cas où la section transversale se présente comme formée de l'accrolement de plusieurs sections différentes, on la décomposera en ses sections élémentaires constitutives et on appliquera la formule choisie à chacune des sections. Le débit total Q sera la somme des débits relatifs à chaque section. Ainsi on aura :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Dans le cas d'une section hétérogène dont le périmètre mouillé est constitué de plusieurs tronçons de périmètres mouillés ayant des rugosités différentes, on détermine pour la section un coefficient de rugosité égale à une valeur qui serait une pondération des divers coefficients de rugosité, proportionnellement à la longueur des divers périmètres mouillés.

Ainsi la formule de Chezy est :

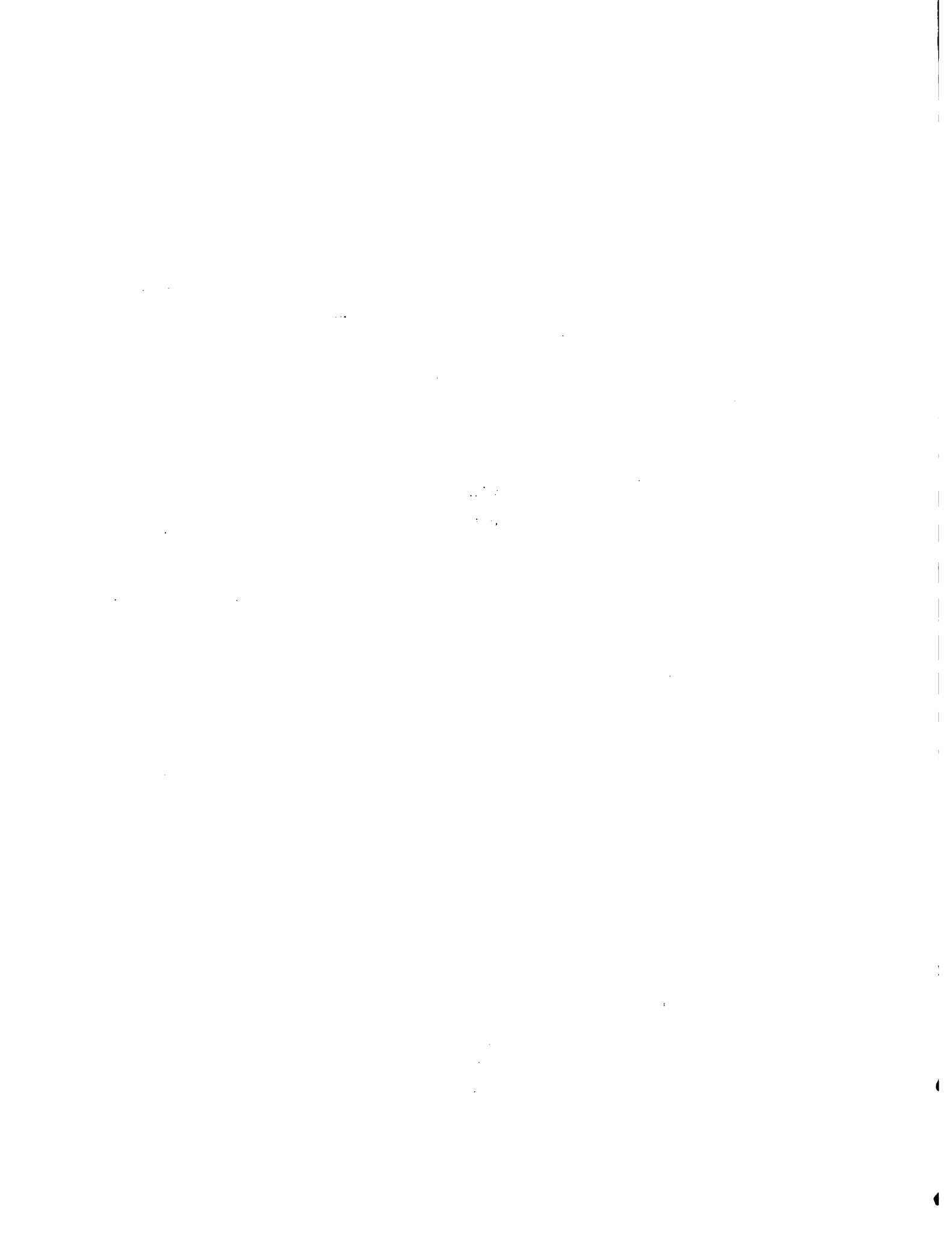
$$V = C \sqrt{RI}$$

On peut aussi écrire :
$$I = \frac{V^2}{C^2 R}$$

$$I = \frac{V^2}{C^2} \cdot \frac{B}{R} = \frac{V^2}{R} \cdot \frac{B}{C^2}$$

En passant à la section homogène, on peut écrire :

$$I = \frac{V^2}{R} \left(\frac{B_1}{C_1^2} \times \frac{B_2}{C_2^2} + \dots + \frac{B_n}{C_n^2} \right)$$



Ce qui nous donne pour C la valeur

$$\frac{B}{C^2} = \left(\frac{B_1}{C_1^2} + \frac{B_2}{C_2^2} + \frac{B_n}{C_n^2} \right)$$

$$C^2 = \frac{B}{\frac{B_1}{C_1^2} + \frac{B_2}{C_2^2} + \frac{B_n}{C_n^2}}$$

Problèmes sur les canaux en régime uniforme

En général les canaux découverts ont les formes suivantes: trapèze isocèle, rectangle, demi-cercle, parabole, etc... La forme la plus répandue est le trapèze isocèle.

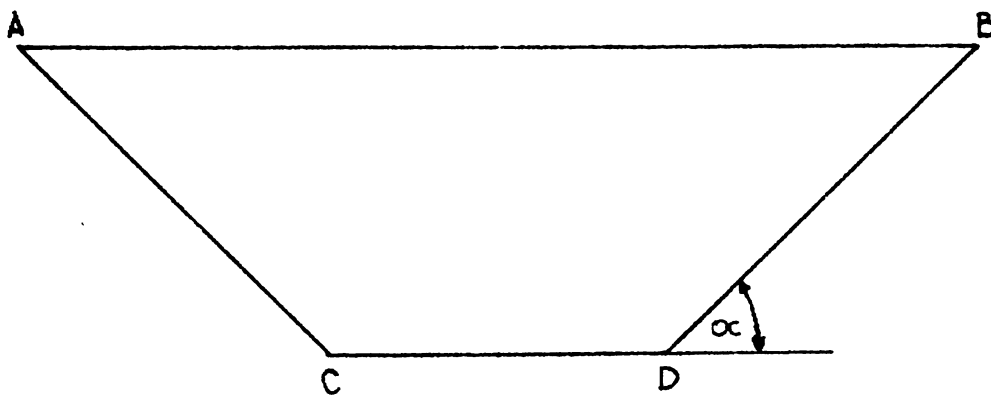


Fig. 14 Section transversale trapézoïdale

Considérons le canal trapézoïdal ci-dessus, on appelle:



BE La gueule du canal ou largeur en gueule

CD Le plafond du canal ou largeur au plafond

AC et BD Les talus

$tg = \frac{1}{Z}$ La pente du talus du canal; dépendant de la nature du terrain.

Pour un même terrain on choisit une pente plus forte en déblai qu'un remblai.

Si on a $\frac{1}{Z}$ pour la pente en déblai, pour R maximum puisque les autres facteurs sont fixés.

$$\text{Or : } R = \frac{S}{P}$$

où:

R est maximum pour P minimum.

Nous savons que pour une aire donnée, parmi toutes les formes, le cercle est celle qui a le périmètre minimum. Si nous considérons des sections ouvertes à la partie supérieure, le demi-cercle est la section de débit maximum.

Dans ce cas:

$$S = \frac{\pi r^2}{2} \quad P = \pi r$$

$$R = \frac{\pi r^2}{2 \pi r} = \frac{r}{2} = \frac{d}{2}$$



Cas de la section trapézoïdale

Le trapèze isocèle est la forme de section transversale que l'on rencontre le plus souvent dans les aménagements de canaux. Il est plus facilement réalisable que le demi-cercle dans les terrains ordinaires.

Voyons pour les éléments de la section trapézoïdale de débit maximum. On pourra prendre pour le talus en remblai la valeur

$$\frac{1}{Z + \frac{Z}{2}}$$

Voici quelques valeurs de Z

Rocher ferme, maçonnerie ordinaire, béton	Z = 0 à 0.25
Rocher fissuré, maçonnerie en pierres sèches	Z = 0.50
Argile dure	Z = 0.75
Alluvions compactes	Z = 1
Gros gravier	Z = 1.50
Terre ordinaire, sable grossier	Z = 2
Terre remuée, sable moyen	Z = 2.50 à 3

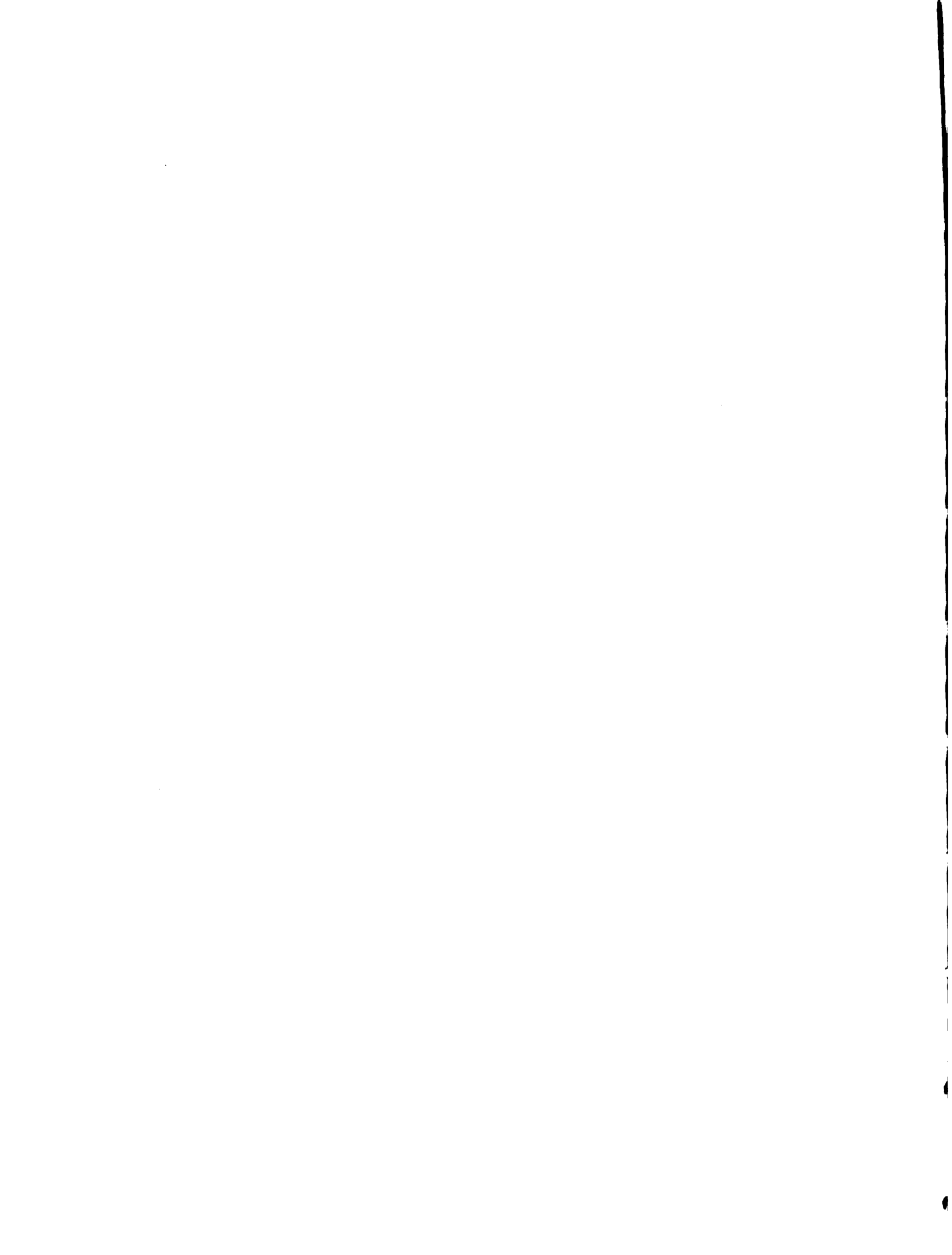
Tableau 3 Valeurs des talus (z) selon le type de matériel

Profil de débit maximum

Considérons un canal de section S donnée de pente I donnée et talus Z donnée, quelle est la forme qui donne le débit maximum.

$$\text{Soit: } Q = SV = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} S$$

Nous pouvons dire que le débit sera maximum.



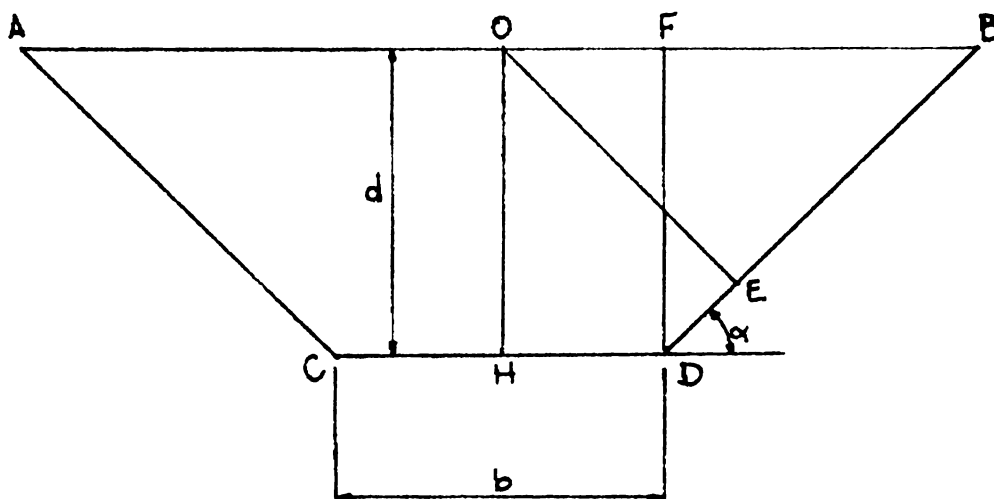


Fig. 15 - Section trapézoïdale maximum.

La section trapézoïdale isocèle peut être définie par :

sa largeur au plafond $b = CD$

sa profondeur d

et sa pente de talus $tg \alpha = \frac{1}{Z}$

Pour un terrain donné α est fixé donc peuvent varier b et d

$$S = \frac{AB + CD}{2} \times d$$

$$AB = b + 2FB = b + \frac{2d}{tg\alpha} = b + 2Zd$$

$$S = \frac{b + 2Zd + b}{2} \times d = d(b + Zd)$$



Périmètre mouillé P:

$$P = b + 2BD = b + 2d \sqrt{1 + Z^2}$$

$$S = d (b + Zd)$$

$$P = b + 2d \sqrt{1 + Z^2}$$

Le périmètre mouillé P devant être minimum, on doit avoir: $dP = 0$

De même, S est constant, on a $dS = 0$

D'où:

$$dS = (b + Zd) d(d) + d (db + Zd (d))$$

$$= (b + 2Zd) d (d) + d db = 0$$

$$dP = d(b) + 2 \sqrt{1 + Z^2} d (d) = 0$$

Nous avons ce système:

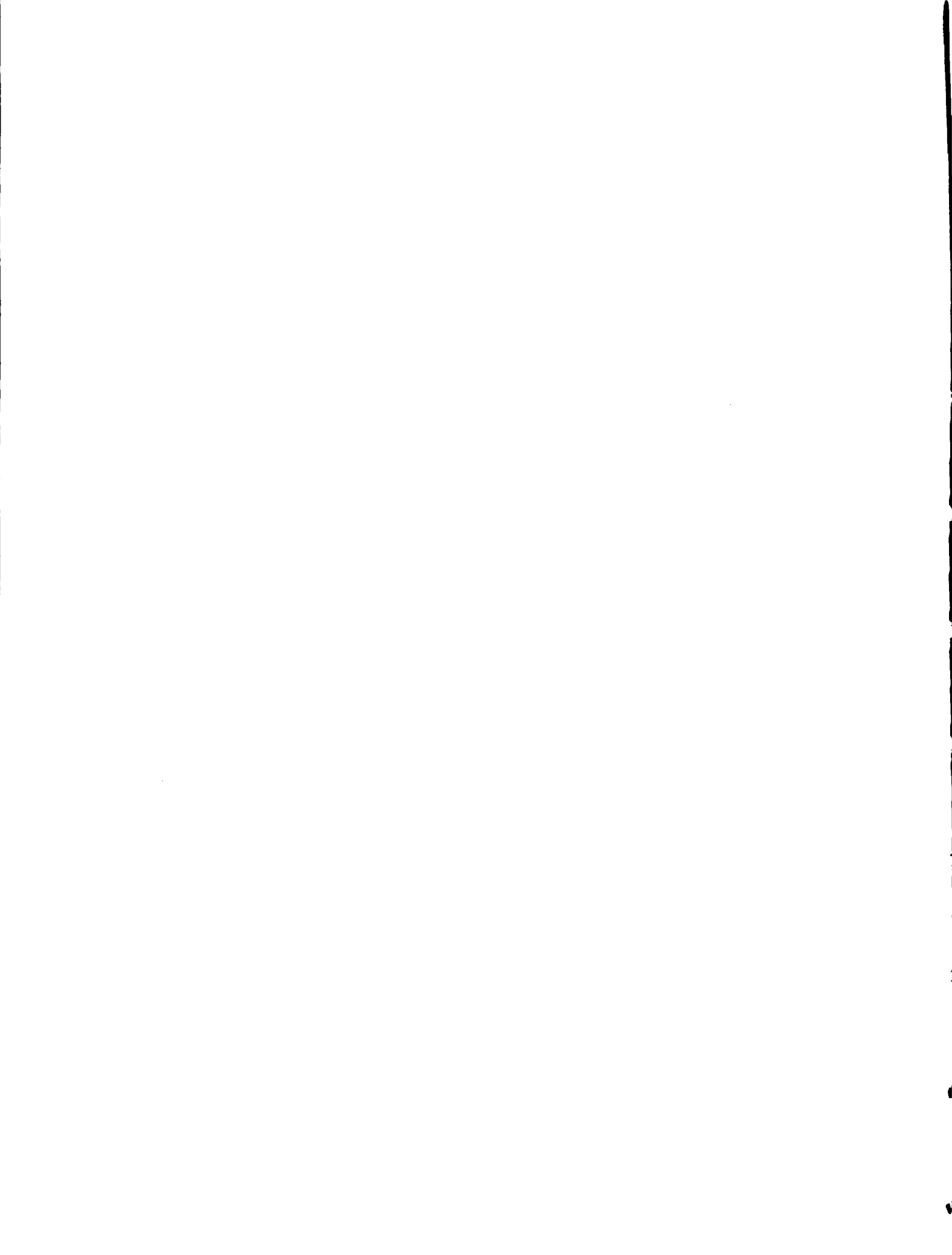
$$(b + 2 Zd) d (d) + d db = 0 \quad (1)$$

$$db + 2 \sqrt{1 + Z^2} d(d) = 0 \quad (2)$$

Que l'on peut écrire:

$$(b + 2Z d) d (d) = - d db \quad (3)$$

$$2\sqrt{1 + Z^2} d(d) = - d(d) \quad (4)$$



Divisant membre à membre:

$$\frac{b + 2Z d}{2\sqrt{1 + Z^2}} = d \quad (5)$$

$$b + 2Z d = 2\sqrt{1 + Z^2}d$$

$$\frac{b}{2} = d\sqrt{1 + Z^2} - Zd \quad (6)$$

De plus nous avons:

$$\sqrt{1 + Z^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$d\sqrt{1 + Z^2} = \frac{d}{\sin \alpha} = BD$$

$$Zd = \frac{d}{\operatorname{tg} \alpha} = FB$$

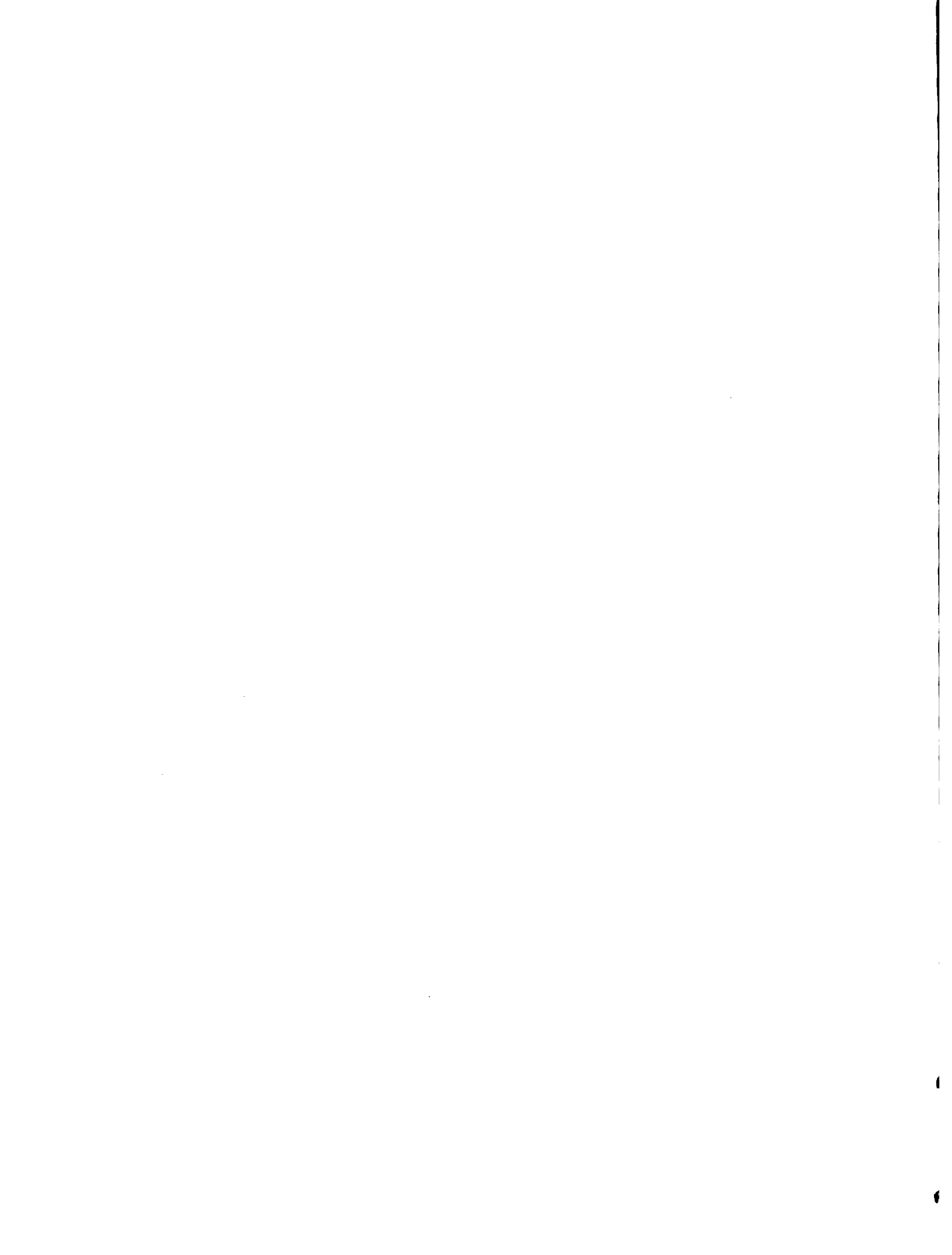
$$\frac{b}{2} = \frac{CD}{2} = HD = OF$$

La relation (6) devient:

$$OF = BD - FB$$

$$OF + FB = BD$$

$$OB = BD$$



D'où le triangle OBD est isocèle et les hauteurs DF et OE sont égales. Et nous pouvons dire que le trapèze en question est circonscrit au demi-cercle de diamètre sur la ligne AB surface libre, de centre O et de rayon OH = d.

Déterminons le rayon hydraulique de cette section:

$$R = \frac{S}{P}$$

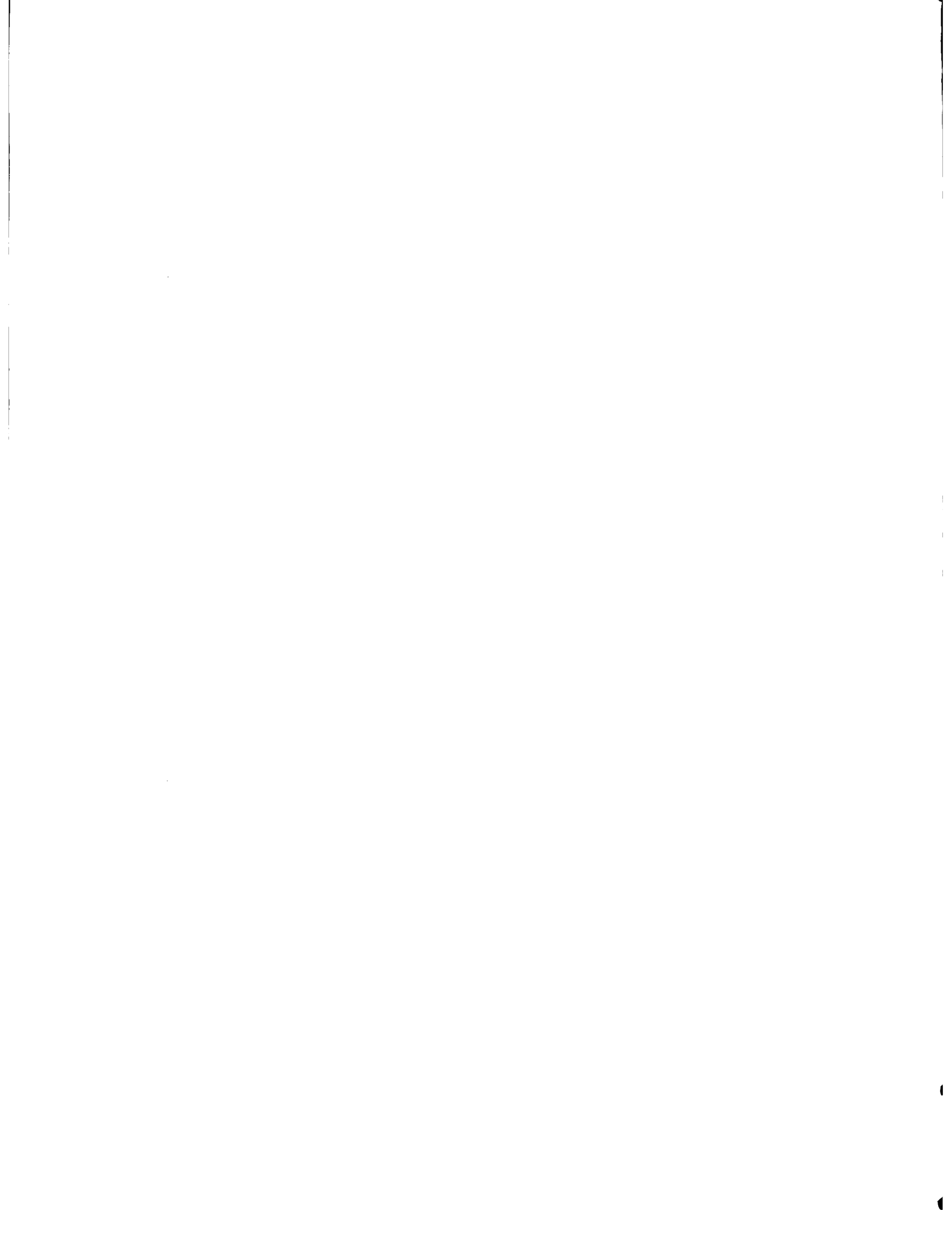
Portons la valeur de b trouvée dans 6 dans les 2 éléments:

$$\begin{aligned} S &= d \left(2d \sqrt{1 + Z^2} - 2Zd + Zd \right) \\ &= d^2 (2\sqrt{1 + Z^2} - Z) \\ P &= 2d \sqrt{1 + Z^2} - 2Zd + 2d \sqrt{1 + Z^2} \\ &= 2d (2\sqrt{1 + Z^2} - Z) \\ R &= \frac{d^2 (2\sqrt{1 + Z^2} - Z)}{2d (2\sqrt{1 + Z^2} - Z)} = \frac{d}{2} \end{aligned}$$

On voit que le rayon hydraulique est encore égal à la moitié de la hauteur comme pour la surface de débit maximum.

Formules de porchet

Porchet a proposé deux formules pour la détermination de la section d'un canal trapézoïdal pour les petits canaux en terre (troisième type de problème).



Ces formules sont valables pour :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{Z} > \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad Z < 1.5$$

$$0.5 \text{ m} < d < 1.5 \text{ m.}$$

Ces formules sont :

$$d = 0.26836 \left(\frac{Q}{\sqrt{I}} \right)^{0.353}$$

$$b = 2d \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = 2d \left(\sqrt{1 + Z^2} - Z \right)$$

Problèmes courant dans le calcul des canaux

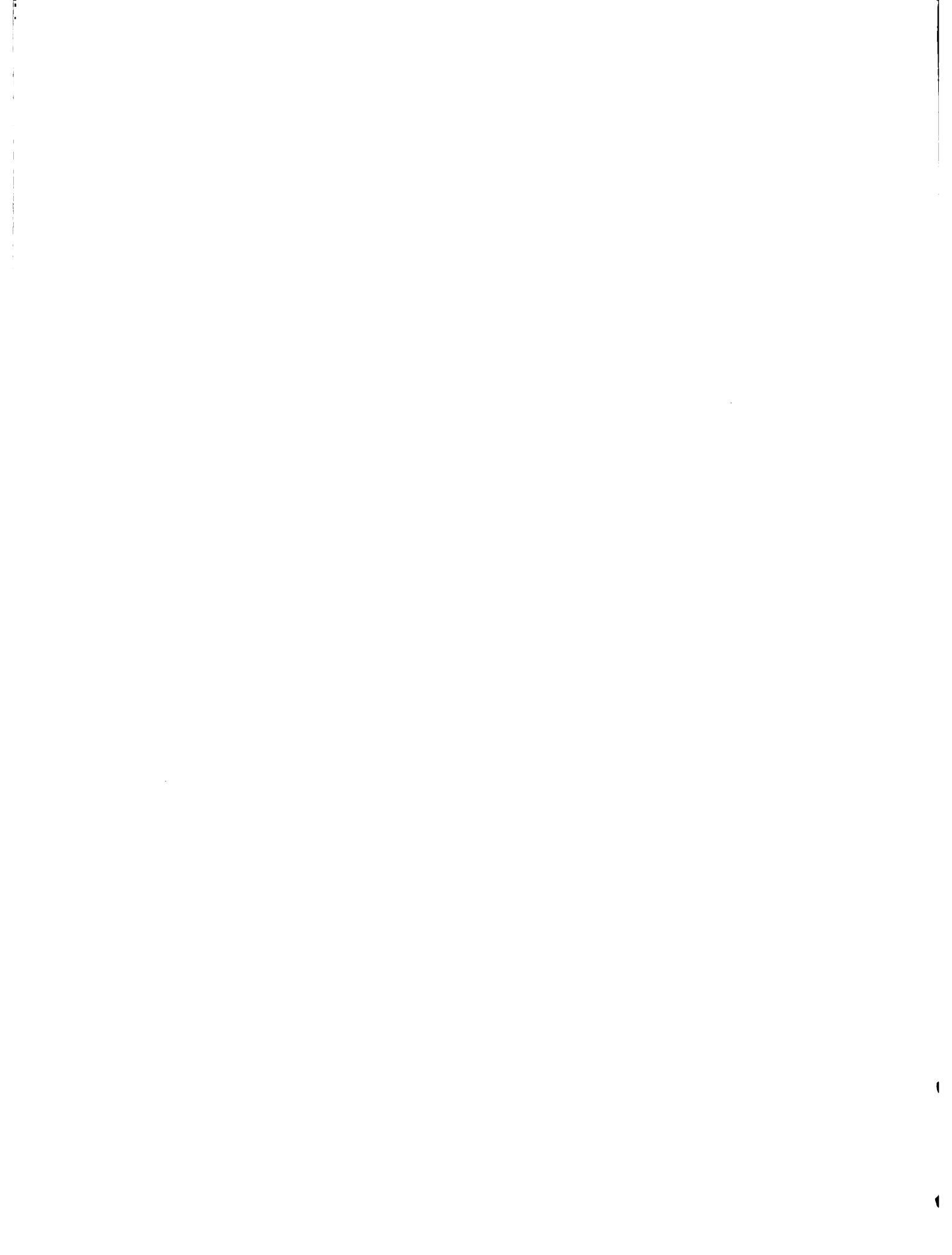
La formule générale de l'écoulement est : $Q = CS \sqrt{RI}$

Dans laquelle C est fixe par la nature des parois et du fond. Il reste donc 3 éléments à calculer : Q, I, S.. En général on connaît où l'on se fixe deux éléments et l'on détermine le 3^e.

Les trois types de calculs que l'on a à effectuer le plus souvent sont :

- On connaît I et S, calculer Q
- On connaît Q et S, calculer I
- On connaît Q et I, calculer S

Les deux premiers types se résolvent facilement, à partir de la formule adoptée.



Pour le troisième type on procède par tâtonnement. On se donne en général la profondeur d , après avoir fixé une largeur b en respectant les conditions pratiques, puis on vérifie pour Q et V . Si les résultats ne sont pas satisfaisants on recommence avec une nouvelle valeur de d .

Aqueducs

L'aqueduc est un canal couvert dans lequel l'écoulement se fait à surface libre (à la pression atmosphérique). La section transversale de l'aqueduc peut avoir des formes très variées: carré, rectangulaire, circulaire, ovoïde, mixte... etc...

Les lois de l'écoulement dans l'aqueduc sont les mêmes que pour les canaux, avec de petites différences provenant du calcul des surfaces, périmètre mouillé, rayon hydraulique.

Le débit maximum de l'aqueduc ne se produit pas lorsque l'écoulement se fait à pleine section mais plutôt lorsqu'il est plein jusqu'à une certaine hauteur qui dépend de la forme de l'aqueduc. Cela est dû au fait qu'à partir d'une certaine hauteur l'augmentation de la hauteur d'eau d , entraîne un accroissement plus important du périmètre mouillé par rapport à la section, d'où une diminution du rayon hydraulique $R = \frac{S}{P}$.

Conditions de débit maximum

Considérons un aqueduc de section quelconque. Soit la section mouillée S et P le périmètre mouillé correspondant et V la vitesse.

Nous avons la relation: $Q = SV$ (1)

$$\frac{S}{P} I = bV^2 \quad (2) \quad (\text{De } V = C \sqrt{RI} ; b = \frac{1}{C^2})$$



La condition de débit maximum est : $dQ = 0$

ou: $dQ = VdS - SdV = 0$

Ecrivons (2) de la façon suivante:

$$SI = PbV^2$$

Dérivons pour I et b constants:

$$IdS = 2bPVdV + bV^2dP \quad (3)$$

Des relations on a:

$$dV = -\frac{VdS}{S}$$

$$bV = \frac{S I}{P V}$$

La relation (3) s'écrit alors:

$$IdS = -2P \frac{S I}{P V} \times \frac{VdS}{S} + \frac{S I}{P} dP$$

D'où l'on tire:

$$3 P d S - S d P = 0$$

qui est la relation de débit maximum



Conditions de vitesse maximale

Nous avons la relation

$$V = C \sqrt{RI} = C \sqrt{\frac{S}{P} I}$$

La condition de vitesse maximale est: $dV = 0$.

Dérivons V pour C et I constants:

$$dV = C I \frac{\frac{PdS - SdP}{P^2}}{2 \sqrt{\frac{S}{P}}} = 0$$

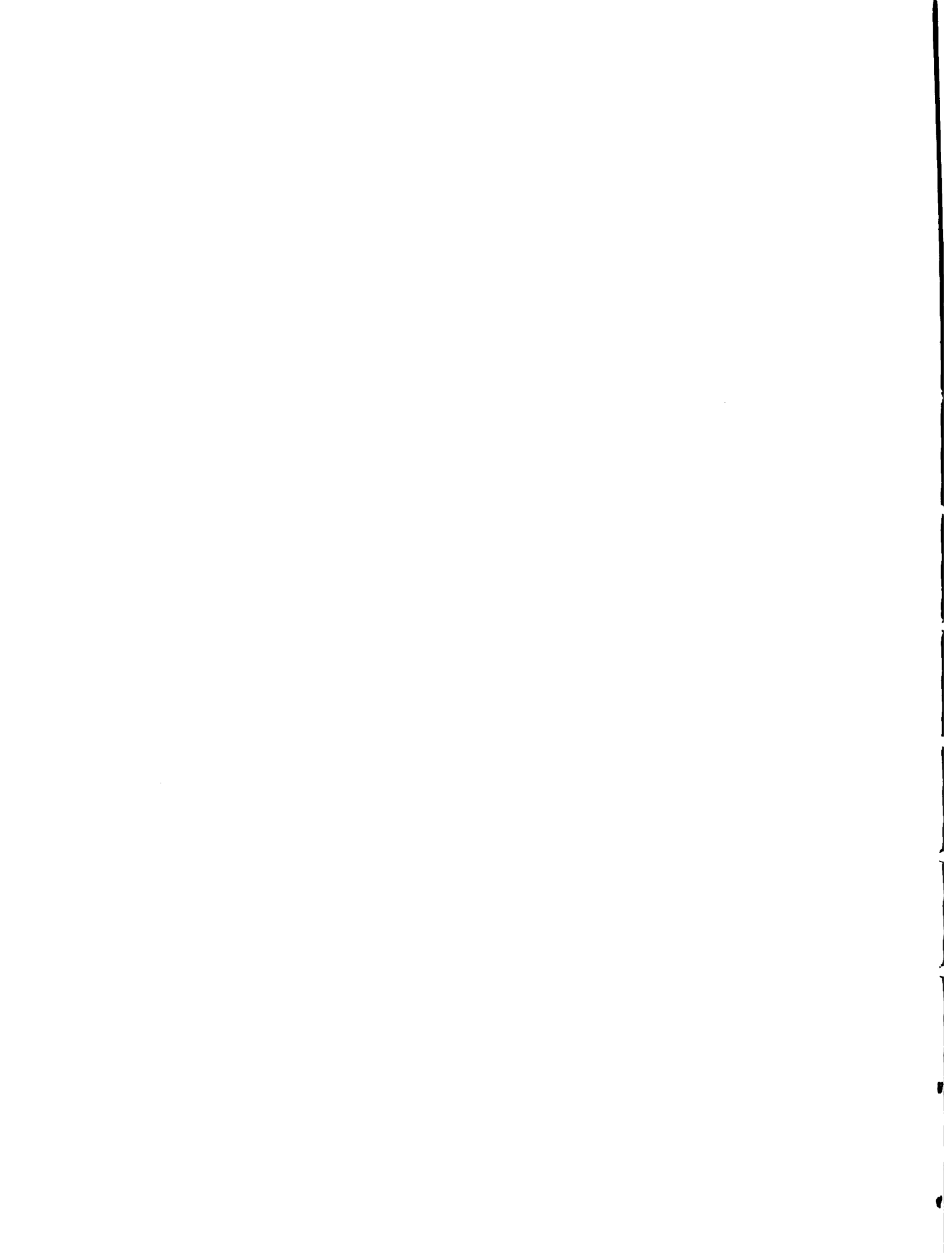
ou

$$\frac{PdS - SdP}{P^2} = 0$$

D'où:

$$PdS - SdP = 0$$

qui est la condition de vitesse maximale



Aqueduc circulaire

L'application des conditions précédentes à un aqueduc circulaire donne les résultats suivants:

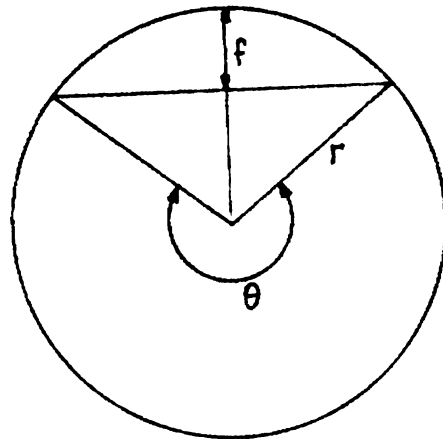


Fig. 16- Aqueduc circulaire

La section mouillée S donne:

$$S = \frac{r^2 \times \theta}{2\pi} + \frac{1}{2} r^2 \sin(2\pi - \theta)$$

$$S = \frac{r^2}{2} (\theta - \sin \theta) \quad ; \quad dS = \frac{r^2}{2} (1 - \cos \theta) d\theta$$

Périmètre mouillé:

$$P = \frac{2\pi r \theta}{2\pi}$$

$$P = r \theta \quad dP = r d\theta$$

$$R = \frac{r (\theta - \sin \theta)}{2 \theta}$$



La condition de débit maximum donne:

$$3P_d S - S_d P = 0$$

$$2\theta - 3\theta \cos\theta + \sin\theta = 0$$

Cette équation est vérifiée pour $\theta = 308^\circ$

La flèche f est:

$$f = r - r \cos\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)$$

Pour $\theta = 308^\circ$ $f = 0.1 r$

La hauteur d'eau correspondant au débit maximum est:

$$d = 1,9r = 0,95 D$$

Le débit maximum sera alors:

$$Q_m = 1,05 Q_p$$

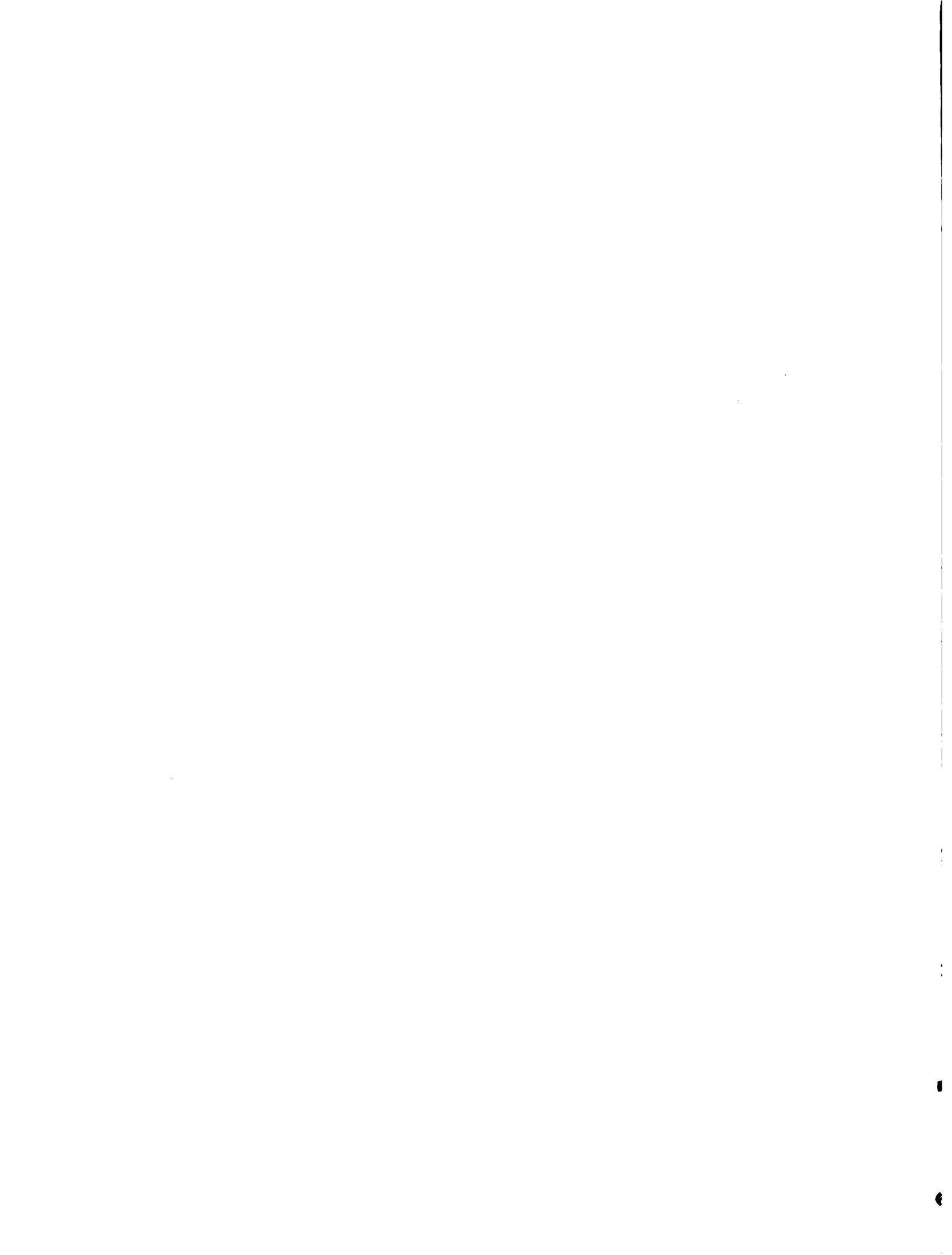
Q_p = le débit à pleine section.

Pour la condition de vitesse maximum on aura l'équation:

$$\sin\theta - \theta \cos\theta = 0$$

vérifiée pour $\theta = 258^\circ$

Ce qui correspond à une hauteur d'eau $d = 0.81D$



CHAPITRE IV
REGIME PERMANENT VARIE

Généralité

L'écoulement uniforme ne s'observe que dans les canaux très long à section constante et assez loin des extrémités. Dans les autres cas les trajectoires des différents fillets ne sont plus parallèles, la profondeur n'est plus constante, la surface libre et le fond du canal ne sont plus parallèles. On est alors en présence de ce que l'on appelle un régime permanent varié.

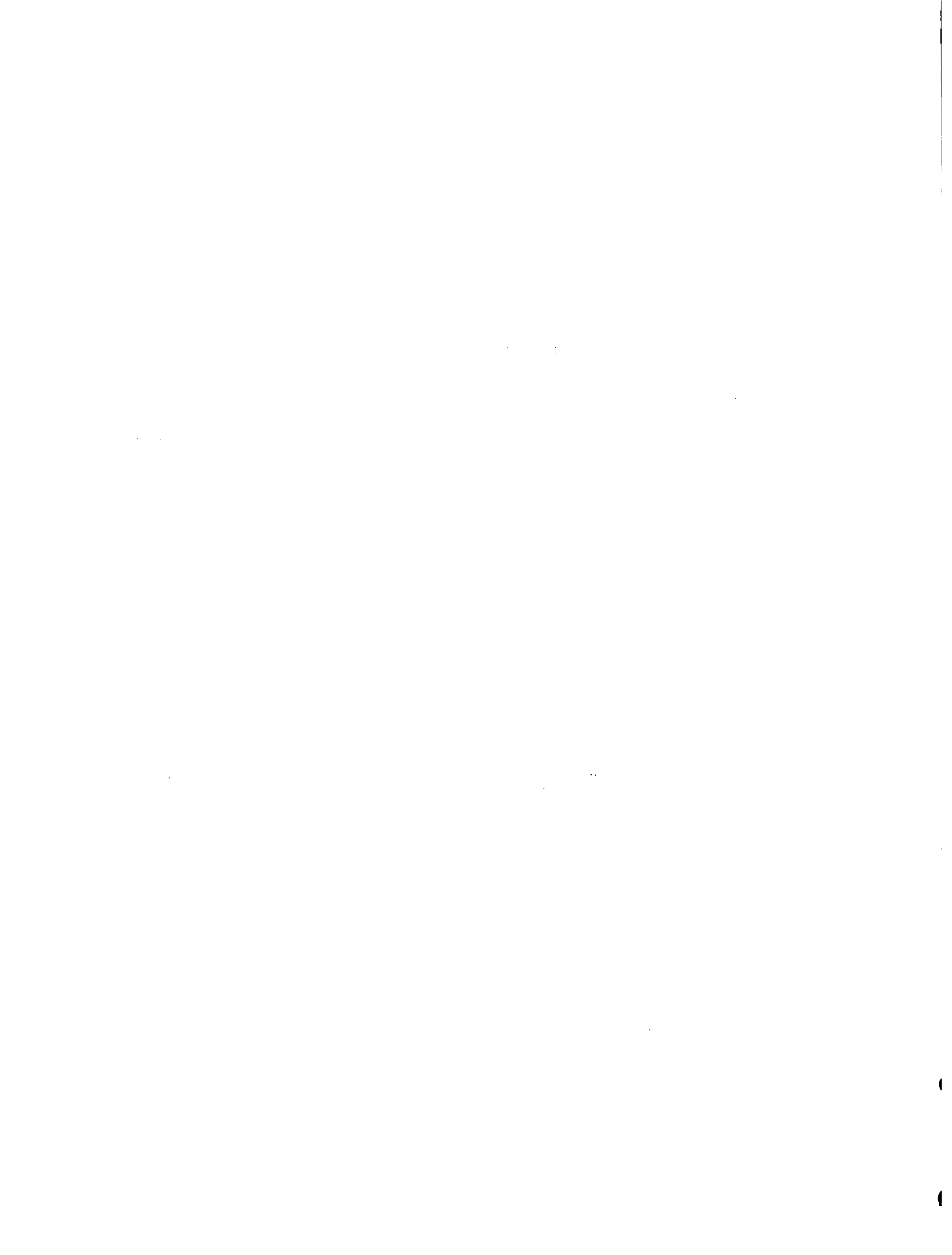
On distingue les écoulements graduellement variés dans lesquelles les éléments varient progressivement et lentement et les écoulements brusquement variés dans lesquelles les changements se font brusquement et rapidement.

Dans les deux cas la courbure de la surface intervient, et les calculs sont alors plus compliqués.

Écoulement graduellement varié

Ce que nous dirons dans ce chapitre concernera les écoulements où la courbure peut être négligée, les variations se faisant très lentement.

- Les canaux varient régulièrement et très lentement dans leur formes et dimensions.
- La profondeur d'eau varie aussi très lentement, la pente et la courbure de la ligne d'eau sont très faibles; la répartition des pressions dans la section est hydrostatique, en



sorte que la surface libre est aussi la ligne piézométrique

- La pente du canal est très faible.
- Pour une section donnée la pente de la ligne de charge est la même que pour celle d'un écoulement uniforme transportant le débit dans la même section avec la même hauteur d'eau.

Comparaison entre pente de la ligne d'eau et pente du fond

Considérons l'écoulement en régime permanent et varié et soient 2 sections S_1 et S_2 d'abscisses x_1, x_2 . Appliquons à l'ensemble du courant le théorème de Bernouilli.

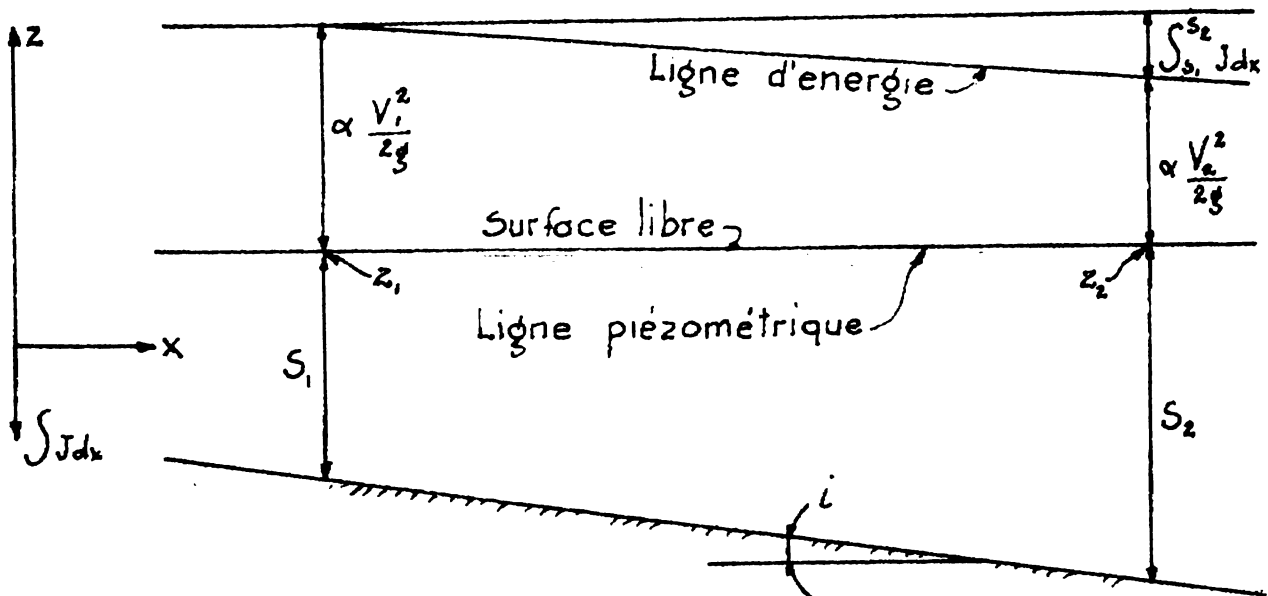
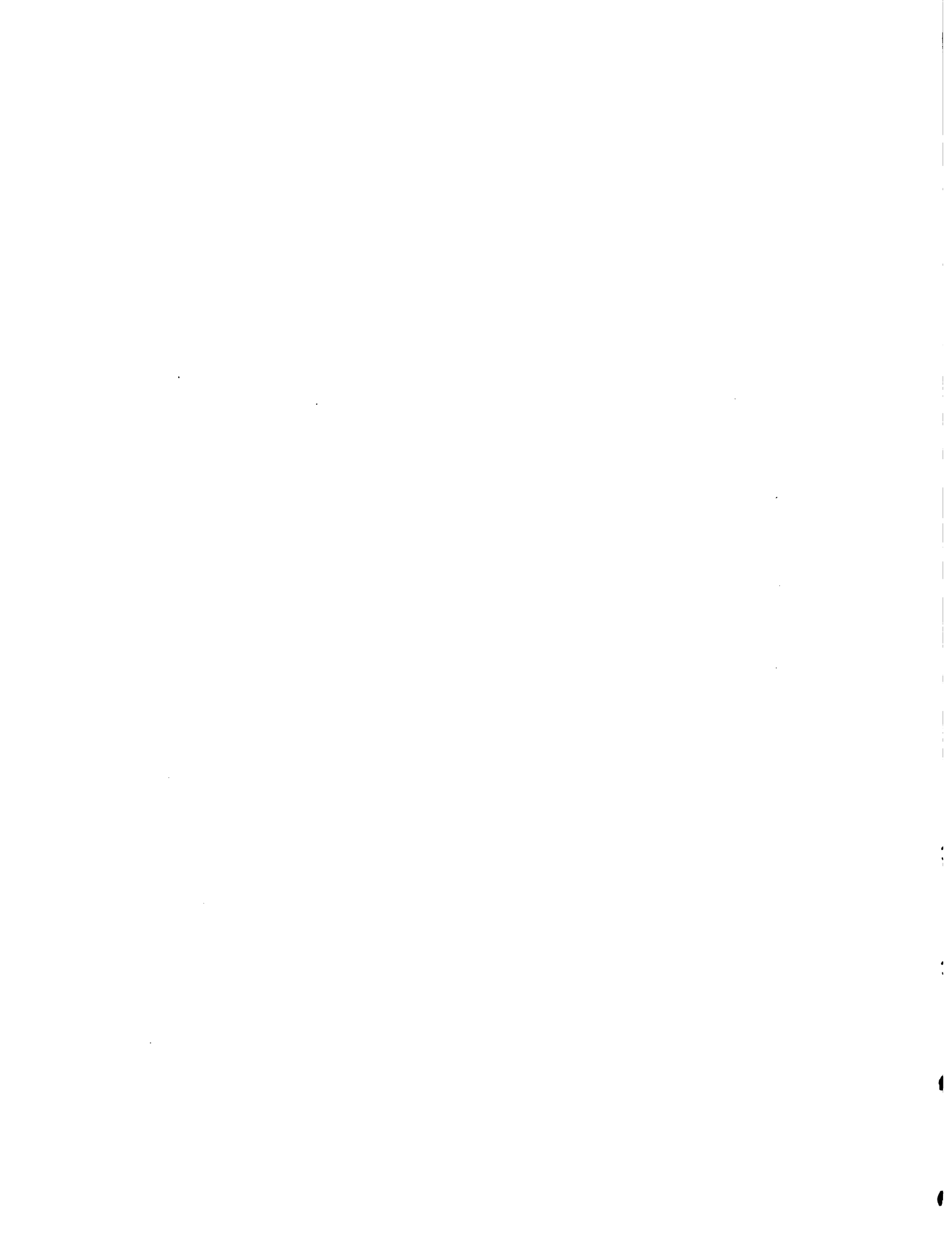


Fig. 17 Comparaison entre la ligne d'eau et la pente du fond.

On aura:

$$z_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \int_{x_1}^{x_2} J dx \quad (1)$$



Z_1 et Z_2 = Côtés de la surface libre dans les sections

V_1 et V_2 = Vitesses moyennes dans les sections

On peut écrire la relation (1) sous la forme suivante:

$$H_1 = H_2 + \int_{X_1}^{X_2} JdX \quad (2)$$

$$\int_{X_1}^{X_2} JdX = \text{Perte d'énergie de la section } S_1 \text{ à } S_2$$

La relation de Bernouilli se rencontre souvent sous sa forme différentielle dans les problèmes d'écoulement en régime varié.

$$dZ + d\left(\alpha \frac{V^2}{2g}\right) + JdX = 0$$

Z et $\frac{V^2}{2g}$ se mesurent positivement vers le haut

J se mesure positivement vers le bas

X se mesure positivement suivant le sens de l'écoulement

Considérons le canal de pente I fonctionnant en régime uniforme pour le débit Q ; la hauteur d'eau sera désignée par d_n ou profondeur normale. Dans ce cas la ligne d'énergie et la ligne du fond ont même pente.



On aura alors:

$$Q = \frac{1}{n} S_n R_n^{2/3} I^{1/2}$$

Pour le régime varié avec l'assimilation de l'écoulement en chaque section à l'écoulement uniforme de même section et de pente J nous aurons;

$$Q = \frac{1}{n} S R^{2/3} J^{1/2}$$

Tirons I et J dans deux expressions de Q et exprimons le rapport

$$\frac{J}{I}$$

$$\frac{J}{I} = \left(\frac{S_n}{S}\right)^2 \left(\frac{R_n}{R}\right)^{4/3}$$

Remarquons que nous avons une section évasée vers le haut ou au moins rectangulaire, donc elle croit avec la hauteur.

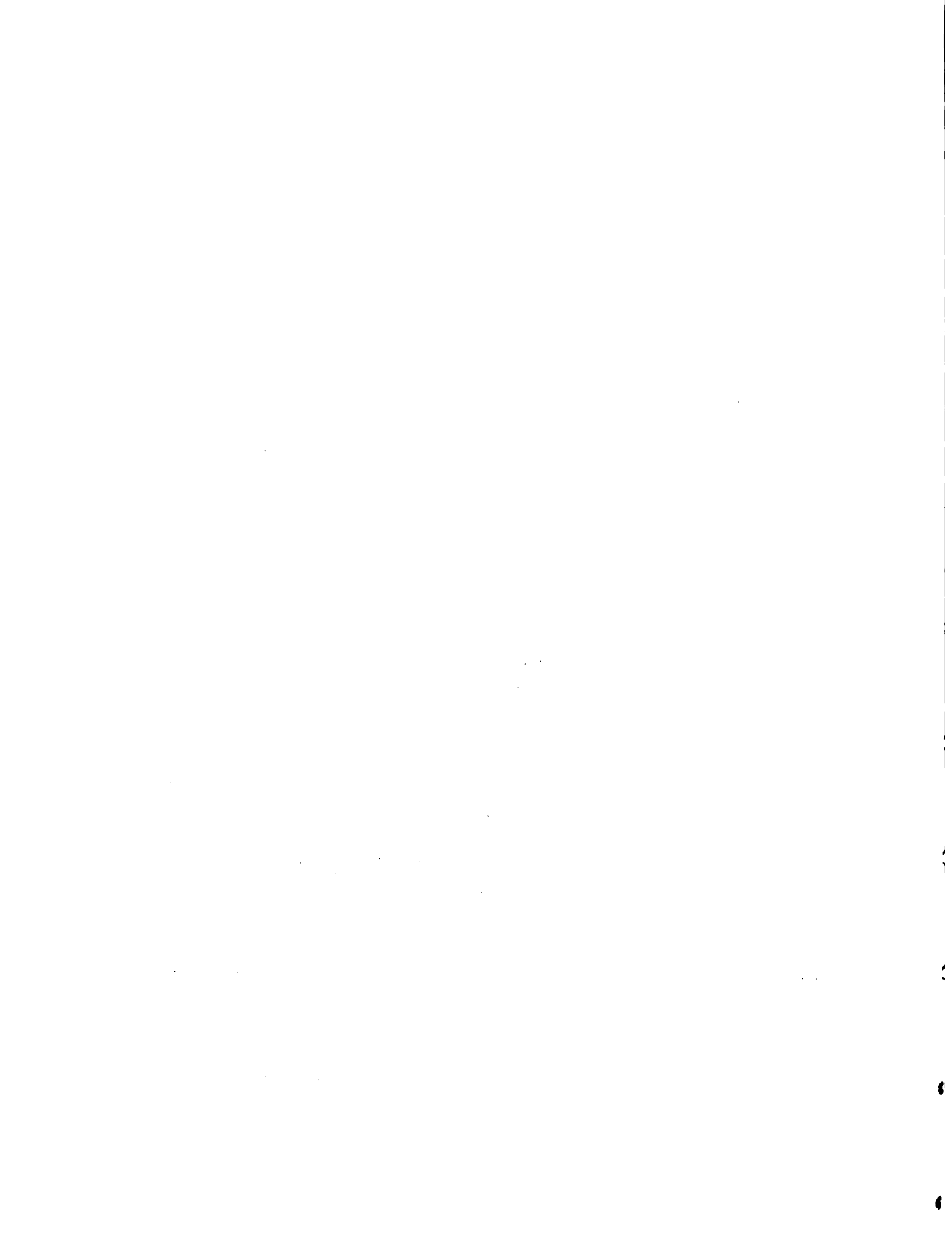
Aussi si l'on a:

$$J > I \quad \text{on aura nécessairement} \quad S_n > S \\ \text{d'où} \quad d_n > d$$

$$J < I \quad \text{on aura nécessairement} \quad S_n < S \\ \text{d'où} \quad d_n < d$$

Dans le premier cas nous aurons la profondeur de l'écoulement en régime varié inférieure à celle de l'écoulement en régime uniforme pour le même débit et la même pente de fond de canal. On a alors ce que l'on appelle un écoulement torrentiel.

Dans le second cas c'est l'inverse et l'on a ce que l'on appelle un écoulement fluvial.



CHAPITRE V

IMPULSION TOTALE

Nous venons d'utiliser le théorème de Bernoulli pour arriver à la comparaison des pentes de la ligne d'énergie et du fond du canal dans l'écoulement en régime varié. Nous allons maintenant utiliser le second théorème très courant en hydraulique: le théorème d'Euler.

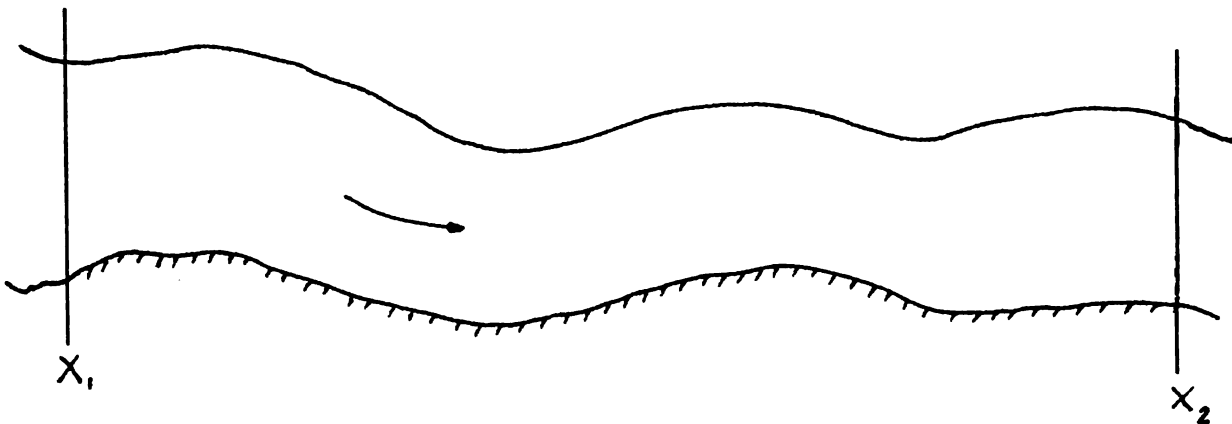


Fig. 18 Schéma d'un bief d'un cours d'eau pour l'application de l'impulsion totale.

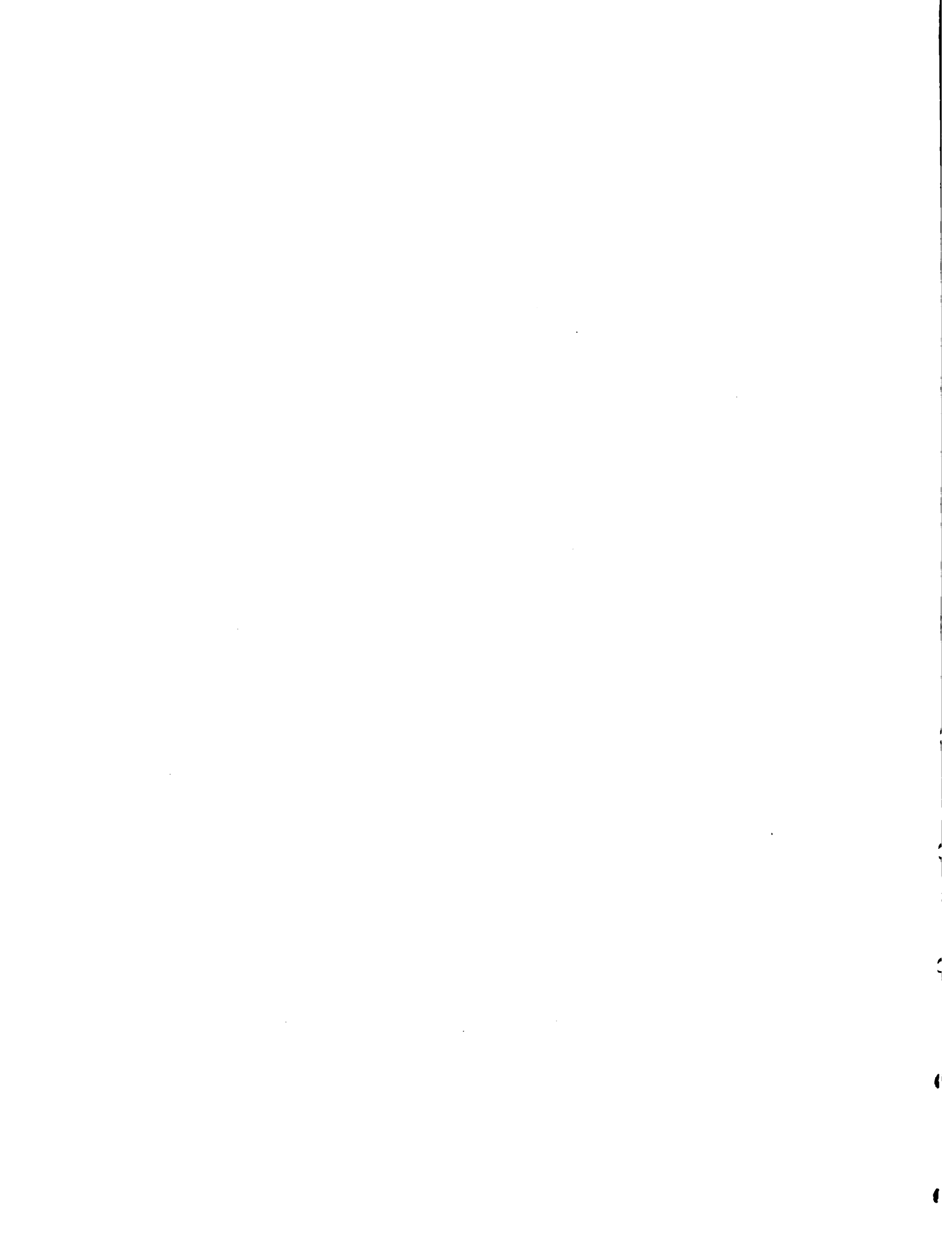
Considérons le tronçon de canal comprise entre les sections X_1 et X_2 . Le tronçon étant le siège d'un écoulement brusquement varié, et les sections X_1 et X_2 sont choisies assez bien pour que l'écoulement puisse être soit uniforme, soit graduellement varié.

Le théorème d'Euler ou théorème de la quantité de mouvement appliqué à la masse liquide comprise entre les sections X_1 et X_2 donne:

$$\frac{\rho}{g} Q \beta_2 V_2 - \frac{\rho}{g} Q \beta_1 V_1 = \overline{F}$$

V_1 et V_2 = Vitesses moyennes dans les sections X_1 et X_2 .

β_1 et β_2 = Coefficient pour tenir compte de l'inégale répartition des vitesses dans les sections.



F = Résultante de toutes les forces extérieures qui agissent sur la masse liquide comprise entre X_1 et X_2 .

La force F comprend:

- le poids de la masse liquide
- les pressions sur les sections X_1 et X_2
- les réactions de parois et du fond sur la masse liquide

Faisons l'approximation $\beta_1 = \beta_2 = 1$ et prenons la relation en projection sur l'axe du canal que nous considérons horizontal vu que la pente est très faible:

$$\frac{\sum Q V_2}{g} - \frac{\sum Q V_1}{g} = P_1 - P_2 + R$$

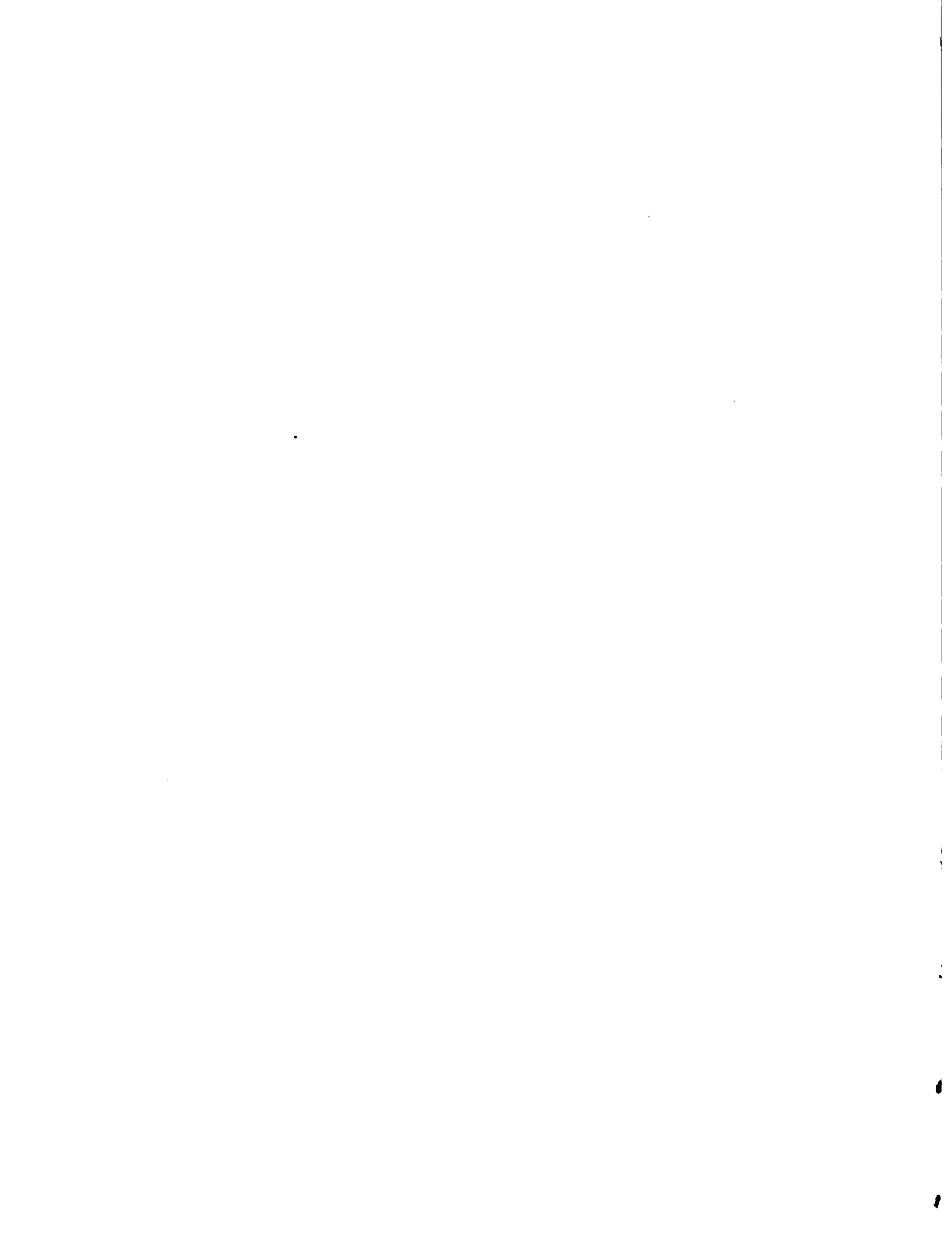
$$\sum Q (V_2 - V_1) = P_1 - P_2 + R$$

Posons :

$$\frac{\sum Q V_2}{g} = M_2 \quad \text{et} \quad \frac{\sum Q V_1}{g} = M_1$$

$$M_2 - M_1 = P_1 - P_2 + R$$

$$R = (M_2 + P_2) - (M_1 + P_1)$$



La fonction $(M + P)$ qui est la somme de la quantité de mouvement de la masse liquide écoulée par unité de temps et de la pression dans la section est appelée Impulsion Totale.

La variation de l'Impulsion Totale entre les deux sections limitant la masse liquide égale à la somme des forces extérieures autres que la pression qui agissent sur la masse liquide: les forces de frottement et de pesanteur.

Soient:

Q Le débit (m^3/s)

V La vitesse moyenne (m/s)

S La section mouillée (m^2)

d_g La profondeur du centre de gravité (m)

Nous avons:

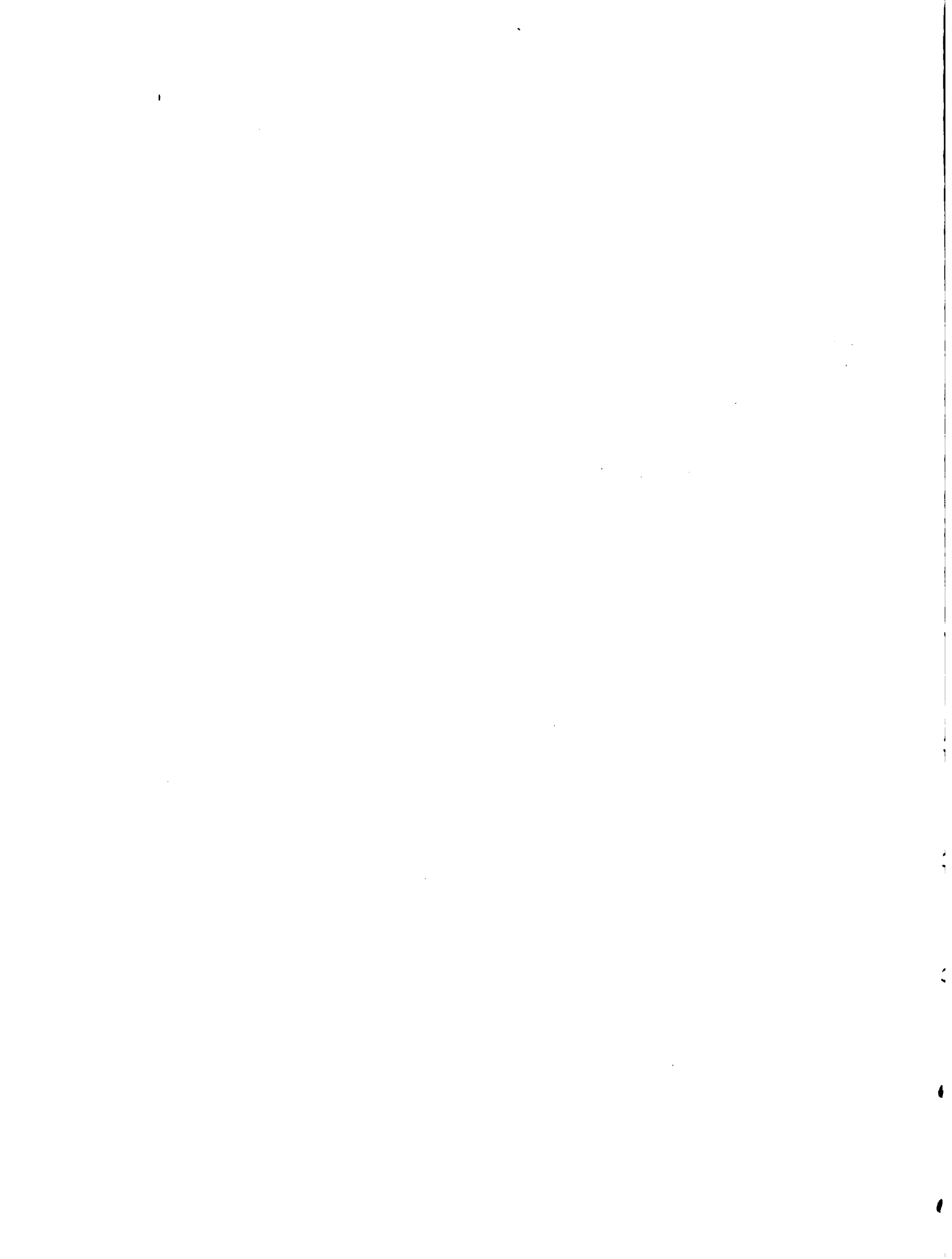
$$M = \frac{\gamma}{g} QV = \frac{\gamma}{g} \frac{Q^2}{S} \quad \text{et} \quad P = \gamma d_g S$$

Posons:

$$F = \frac{M + P}{\gamma} = \frac{Q^2}{gS} + d_g S$$

La variation $\gamma (F_1 - F_2)$ est égale à la somme des forces exercées par la masse liquide en mouvement sur la paroi et le fond du canal.

Si on peut négliger les forces de frottement sur les parois et le



fonction on aura:

$$\gamma (F_1 - F_2) = \gamma (F_2 - F_1) = 0$$

$$D'où F_1 = F_2 = \text{constante}$$

Et l'on peut poser:

$$\frac{Q^2}{gS_1} + d_g S_1 = \frac{Q^2}{gS_2} + d_g S_2$$

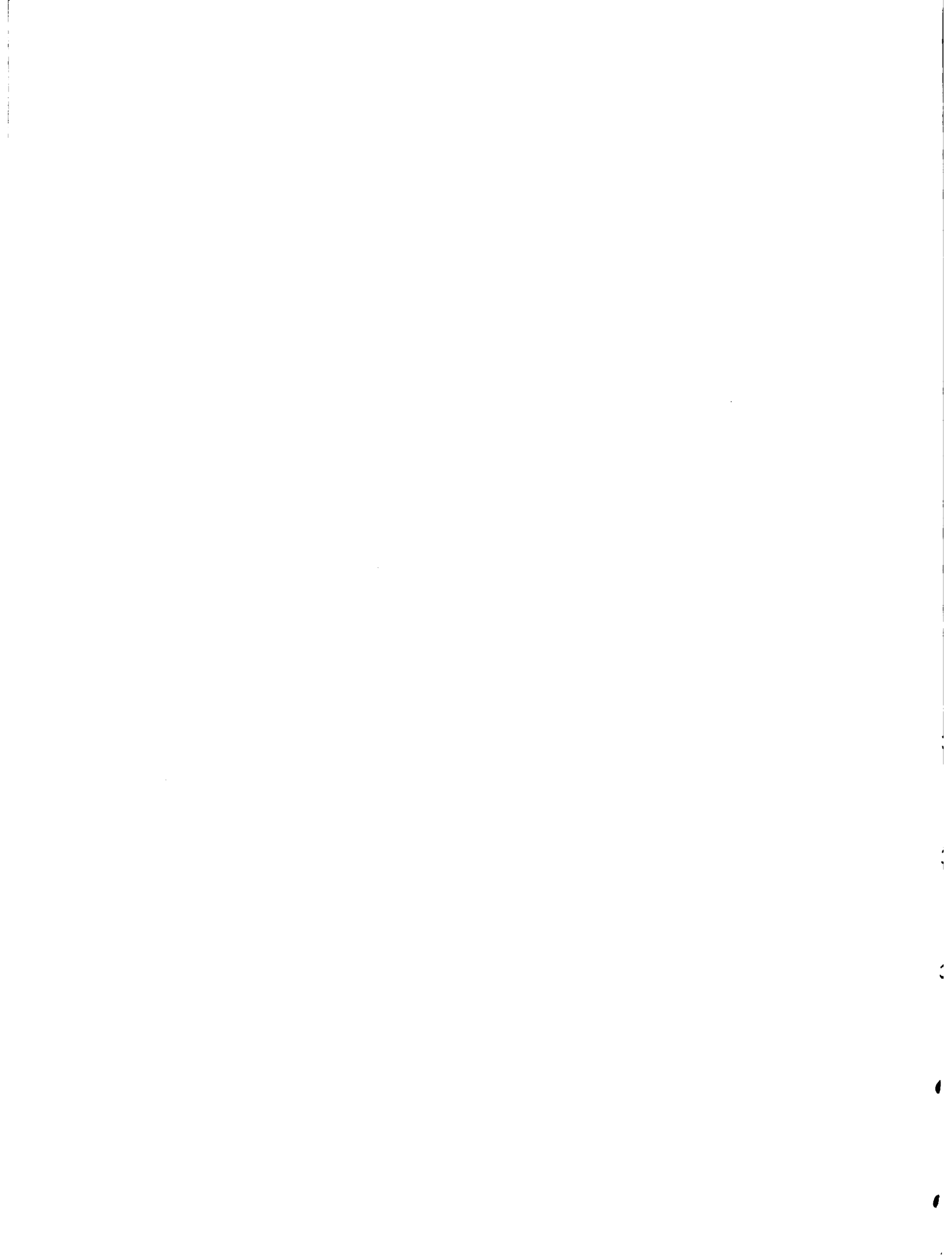
Si le canal est rectangulaire le débit par unité de largeur est

$q = \frac{Q}{S}$ et avec d_1 et d_2 profondeur l'expression précédente s'écrit:

$$\frac{q^2 b^2}{g b d_1} + \frac{d_1}{2} \times d_1 b = \frac{q^2 b^2}{g b d_2} = \frac{d_2}{2} \times d_2 b$$

$$\frac{q^2}{g d_1} = \frac{d_1^2}{2} = \frac{q^2}{g d_2} = \frac{d_2^2}{2}$$

L'impulsion par unité de largeur pour le canal rectangulaire entre les sections χ_1 et χ_2 est constante.



Energie spécifique

Considérons dans un écoulement une section quelconque, l'Energie relative à cette section par rapport à un plan de référence est:

$$E = z + d + \frac{v^2}{2g}$$

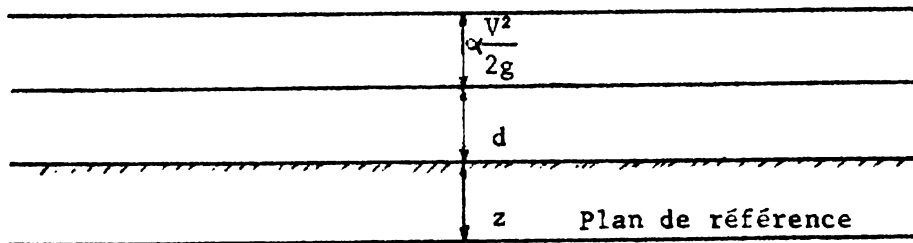


Fig. 19 Schéma pour la visualisation de l'énergie dans un écoulement à surface libre.

Maintenant si nous prenons comme plan de référence le plan horizontal passant par le fond du canal, on aura:

$$E = d + \alpha \frac{v^2}{2g} \quad \text{ou}$$

$$E = d + \frac{v^2}{2g} \quad \text{si on prend } \alpha = 1$$

L'énergie E ainsi définie prend le nom d'énergie spécifique. L'énergie spécifique est donc, pour une section donnée, la valeur moyenne de l'énergie des molécules de cette section par unité de poids, rapporté au plan horizontal passant par le point le plus bas de la section.



En introduisant le débit Q on a :

$$E = d + \frac{Q^2}{2gS^2}$$

a) Variation E en fonction de d pour Q constant

Pour un débit Q donné, comment varie E quand d varie?

Calculons $\frac{dE}{dd}$

$$\frac{dE}{dd} = 1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dd} \left(\frac{1}{S^2} \right) = 1 + \frac{Q^2}{2g} \times - \frac{2}{S^4} \frac{dS}{dd}$$

$$= 1 - \frac{Q^2}{g S^3} \frac{dS}{dd}$$

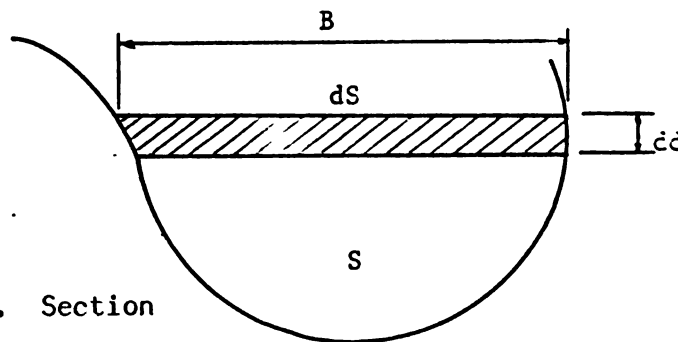
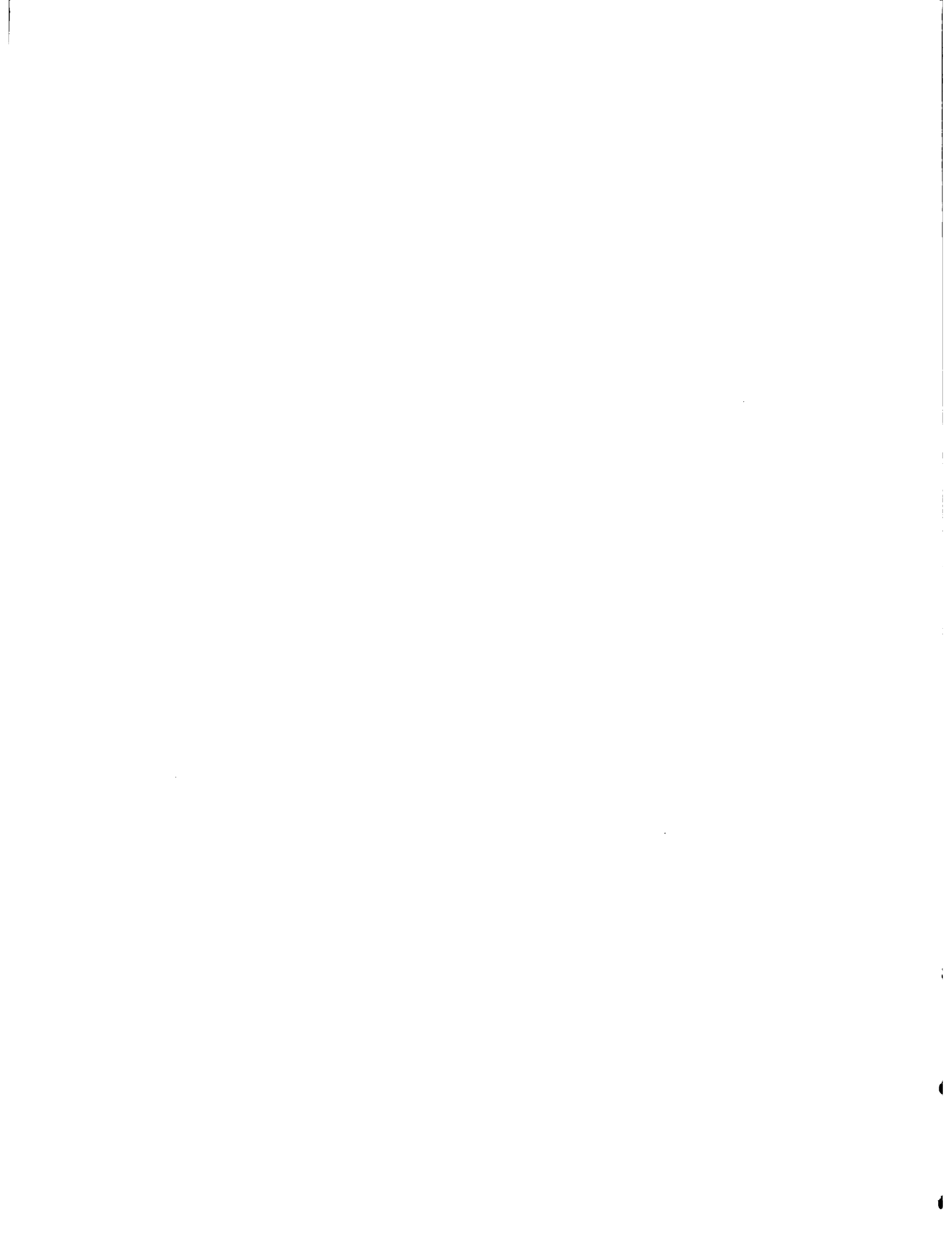


Fig. 20. Section

transversale pour visualiser l'obtention de l'équation de l'énergie.

Se référant à la figure cidessus nous voyons que nous avons:

$$\frac{dS}{dd} = B$$



B = Largeur en surface de la section S

et $\frac{dE}{dd}$ dévient:

$$\frac{dE}{dd} = 1 - \frac{Q^2 B}{gS^3}$$

L'énergie spécifique est minimum pour une certaine valeur de d donnée par:

$$1 - \frac{Q^2 B}{gS^3} = 0 \text{ ou}$$

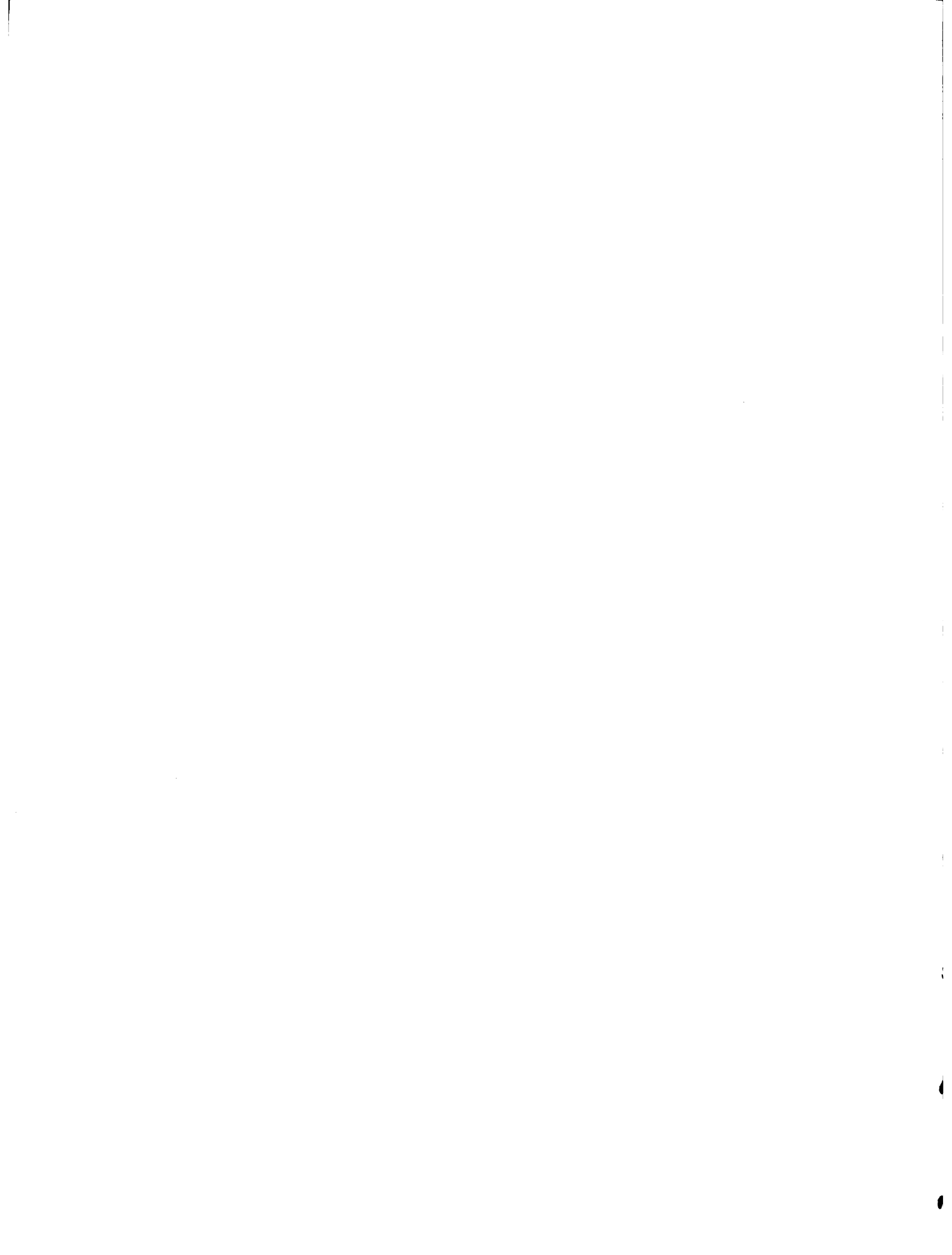
$$\frac{Q^2 B}{gS^3} = 1$$

Cette valeur d est désignée par d_c est appelée hauteur d'eau critique.

b) Variation de Q en fonction de d pour E constant

Pour une valeur de E constant voyons comment varie Q en fonction de d .

L'équation $E = d + \frac{Q^2}{2gS^2}$ peut s'écrire:



$$Q^2 = 2gS^2E - d \times 2gS^2$$

$$\text{D'où nous tirons } Q = S \sqrt{2g(E - d)} \quad (1)$$

$$Q = 0 \text{ pour } S = 0 \text{ c'est à dire } d = 0$$

$$E = d$$

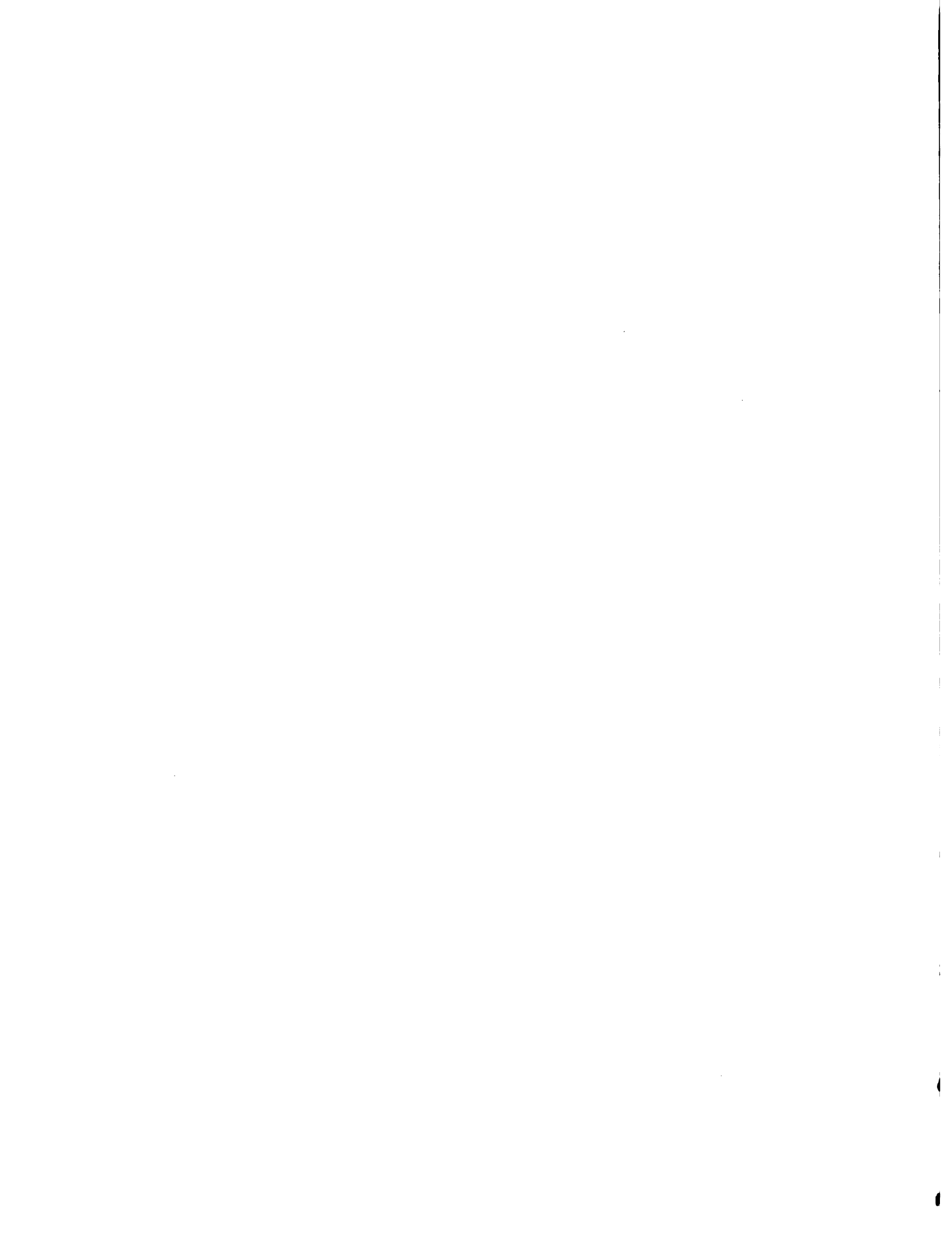
$$\text{Calculons } \frac{dQ}{dd}$$

$$\frac{dQ}{dd} = \frac{dS}{dd} \sqrt{2g(E - d)} - \frac{2gS}{2\sqrt{2g(E-d)}} dd$$

$$= \frac{2B [2g(E - d)] - 2gS}{2\sqrt{2g(E - d)}}$$

$$\frac{dQ}{dd} = \frac{gB \left[2(E - d) - \frac{S}{B} \right]}{2\sqrt{2g(E - d)}}$$

$$\frac{dQ}{dd} = 0 \text{ pour } d \text{ racine de l'équation}$$



$$gB \left[2(E - d) - \frac{S}{B} \right] = 0$$

$$\text{ou } 2(E - d) = \frac{S}{B}$$

Portons cette valeur de $2(E - d)$ dans l'équation (1)
nous trouvons une valeur maximum de Q qui est:

$$Q = S \sqrt{g \frac{S}{B}} \quad \text{ou} \quad Q^2 = \frac{g S^3}{B}$$

$$\text{ou} \quad \frac{Q^2 B}{g S^3} = 1$$

Pour la valeur de d racine de l'équation précédente

La relation $\frac{Q^2 B}{g S^2} = 1$ est la même que celle trouvée pour (1)

pour la hauteur critique d_c , donc la valeur de d pour ce cas-ci est aussi
la même valeur critique d_c définie précédemment.

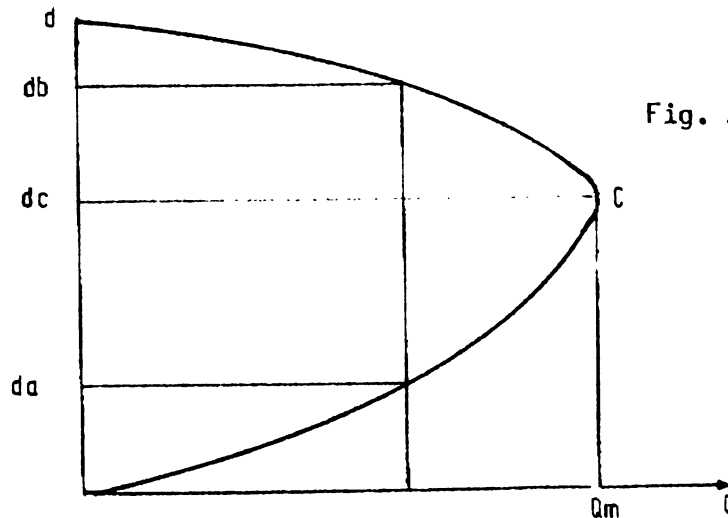


Fig. 21 Schéma de la relation
profondeur d'eau
Débit pour une valeur
d'énergie spécifique
donnée.



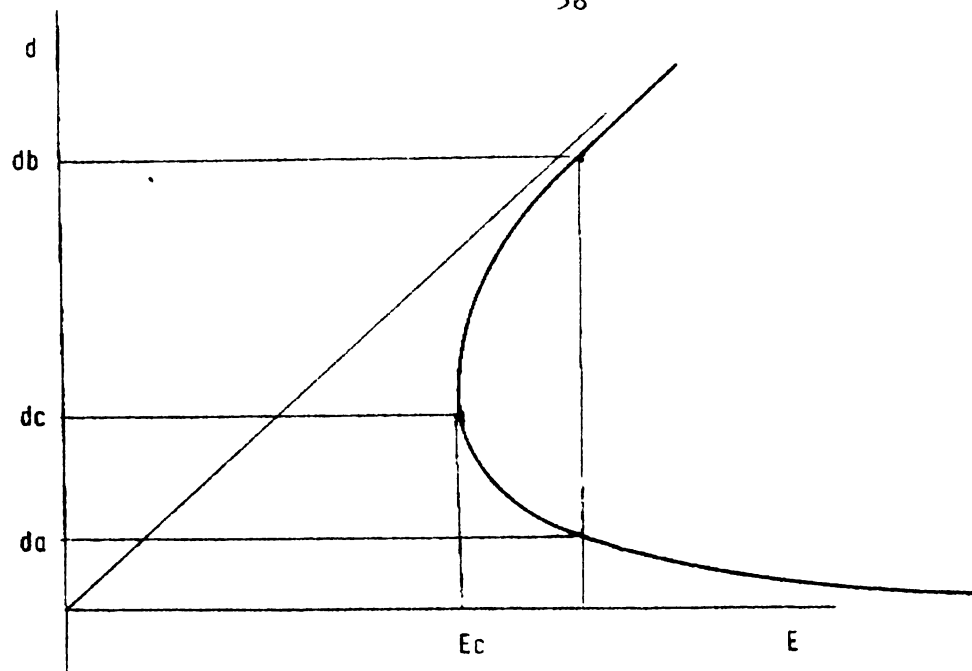


Fig. 22 - Schéma de la relation $E = f(d)$

$E(h)$ pour E constant

- La courbe $Q(d)$ pour E constant montre que pour un débit Q donnée il y a deux hauteurs d_a et d_b ou profondeurs correspondantes. Pour une hauteur d_c appelée profondeur critique le débit Q est maximum pour la valeur de E .
- La courbe $E(d)$ pour Q constant montre que une certaine valeur de E il y a deux hauteurs d_a et d_b pour le débit Q . Pour une hauteur d_c appelée profondeur ou hauteur critique, l'énergie E_c est minimum pour le débit.

Définissons la profondeur critique d_c , la profondeur qui pour un débit donné correspond à l'énergie spécifique minimum et pour une énergie donnée correspond au débit maximum.



Régime critique

Lorsque la profondeur d est égale à d_c ou profondeur critique on est en Régime Critique et tous les éléments de l'écoulements sont alors des éléments critiques (section, rayon hydraulique, périmètre mouillé, vitesse etc...)

Pente critique

La pente critique est la pente I_c du canal pour laquelle la profondeur normale est aussi la profondeur critique.

La profondeur normale peut se calculer par la formule générale de Chezy:

$$Q = C S \sqrt{RI}$$

ou

$$Q^2 = C^2 S^2 RI$$

Pour les éléments critiques on a la relation

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{S^3}{B} \quad \text{ou} \quad Q^2 = \frac{g S^3}{B}$$

Portons cette valeur dans la relation précédente:

$$\frac{g S^3}{B} = C^2 S^2 RI \quad \text{ou} \quad gS = C^2 B RI$$



D'où l'on tire:

$$I_c = \frac{gS}{C^2 BR}$$

Ecoulement fluvial - Ecoulement torrentiel

La profondeur critique d_c divise la courbe $E(d)$ pour un débit donné en deux branches:

- L'une où la hauteur d est supérieure à d_c et où $E(d)$ croît avec d et la vitesse moyenne est inférieure à la vitesse critique.
- L'autre où la hauteur d est inférieure à d_c et où l'énergie spécifique E croît quand d décroît et la vitesse moyenne est supérieure à la vitesse critique.

Dans le premier cas nous avons le régime fluvial ou tranquille; dans le deuxième cas nous avons le régime torrentiel ou rapide.



Formule du régime critique

a) Section de forme quelconque

Prenons l'expression
$$E = d + \frac{Q^2}{2g S^2}$$

Pour une valeur de Q donnée nous savons que E est minimum pour le régime critique, c'est à dire pour:

$$\frac{d E}{d d} = 0$$

$$\frac{d E}{d d} = 1 - \frac{Q^2 B}{g S^3} = 0$$

d' où:

$$\frac{S^3}{B} = \frac{Q^2}{g}$$

qui est la relation du régime critique.

On peut dire que S , B peuvent être déterminés en fonction de d_c , en sorte que la relation peut être considérée comme implicitement de la forme $d_c = f(Q)$.

Si donc nous y tirons Q

$$Q = \sqrt{\frac{g S^3}{B}}$$

Il sera possible de tracer la courbe $Q(d_c)$ ou $d_c(Q)$ que nous appellerons la courbe des profondeurs critiques de la section.



Faisons les calculs suivants:

$$\text{Posons } Q = S V_c \quad \text{et} \quad \frac{S}{B} = d_{mc}$$

et portons ces valeurs dans la relation du régime critique

$$d_{mc} S^2 = \frac{V_c^2 S^2}{g}$$

$$d_{mc} = \frac{V_c^2}{g} \quad \text{et} \quad V_c = \sqrt{g d_{mc}}$$

d_{mc} est appelé hauteur moyenne critique de la section.

Le nombre de froude critique est:

$$F_c = \frac{V_c}{\sqrt{g d_{mc}}} = \frac{\sqrt{g d_{mc}}}{\sqrt{g d_{mc}}} = 1$$

Donc au régime critique le nombre de froude est égale à 1.

L'énergie spécifique critique est:

$$E_c = d_c + \frac{V_c^2}{2g} = d_c + \frac{d_{mc}}{2}$$



Section rectangulaire

b) Section rectangulaire

$$\text{On a: } S = B d \quad d = d_m$$

$$q = \frac{Q}{B} \quad (\text{débit par unité de largeur, on dit aussi débit unitaire})$$

La relation fondamentale du régime critique s'écrit:

$$\frac{B^3 d_c^3}{B} = \frac{Q^2 B^2}{g}$$

D'où l'on tire:

$$d_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

$$\text{De } d_{mc} = \frac{v_c^2}{g} \quad \text{on tire} \quad d_c = \frac{v_c^2}{g}$$

$$\text{De } E_c = d_c + \frac{d_{mc}}{2} \quad \text{on tire:}$$

$$E_c = d_c + \frac{d_c}{2} \quad E_c = 3/2 d_c$$



Profondeurs correspondantes

Les profondeurs correspondantes d_1 et d_2 sont les profondeurs qui pour un débit donné correspondent à une même énergie spécifique E .

On a donc:

$$E = d_1 + \frac{v_1^2}{2g} = d_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

a) Nous utiliserons une section rectangulaire pour les calculs qui suivent:

Avec le débit unitaire: $q = \frac{Q}{B}$

$$v_1 = \frac{q}{d_1} \quad v_2 = \frac{q}{d_2}$$

Portons dans la relation de E

$$d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} = d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2}$$

$$d_1 - d_2 = \frac{q^2}{2g} \left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2} \right) = \frac{q^2}{2g} \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^2 d_2^2}$$

Nous avons la relation:

$$d_c^3 = \frac{q^2}{g}$$



En portant dans la relation

On a:

$$d_1 - d_2 = \frac{d_c^3}{2} \cdot \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^2 d_2^2}$$

D'où nous tirons:

$$d_c^3 = \frac{2 \cdot d_1^2 d_2^2 (d_1 - d_2)}{d_1^2 - d_2^2}$$

$$d_c^3 = \frac{2 d_1^2 d_2^2}{d_1 + d_2}$$

Cette dernière relation permet donc de calculer l'une des profondeurs correspondantes en fonction de l'autre.

b) Cas des section quelconques

Dans le cas des sections quelconques on doit tracer la courbe $E(d)$ pour le débit considéré et on résoud le problème graphiquement à l'aide de la courbe ainsi construite.



Etude des formes de la ligne d'eau

Nous arrivons à l'étude des formes de ligne d'eau. Considérons l'expression $\frac{d(d)}{dx}$ définie précédemment, le numérateur s'annule pour

la valeur de $d = d_n$

Pour $d = d_n$ (profondeur normale) c'est à dire pour

$$I = J \text{ le numérateur} = 0$$

Pour $d < d_n$ ou $I < J$ il est négatif

$d > d_n$ ou $I > J$ il est positif

Le dénominateur s'annule pour:

$d = d_c$ (profondeur critique)

$d > d_c$ il est positif

$d < d_c$ il est négatif

Nous pouvons donc déduire que:

$$\frac{d(d)}{dx} \text{ à le signe de } \frac{d - d_n}{d - d_c}$$

Formes de la ligne d'eau

Equation de la pente de la ligne d'eau.



Considérons la relation de Bernouilli

$$E = d + z_f + \frac{v^2}{2g} \quad \text{avec } v = \frac{Q}{S}$$

Puisque nous traitons de pente très faible nous pouvons confondre sans grand inconvénient, pour ce qui nous concerne, nous pouvons donc prendre la dérivation de la relation plus haut par rapport à l'abscisse X, horizontale, que par rapport à s suivant le fond.

On aura:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d(d)}{dx} + \frac{dz_f}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right)$$

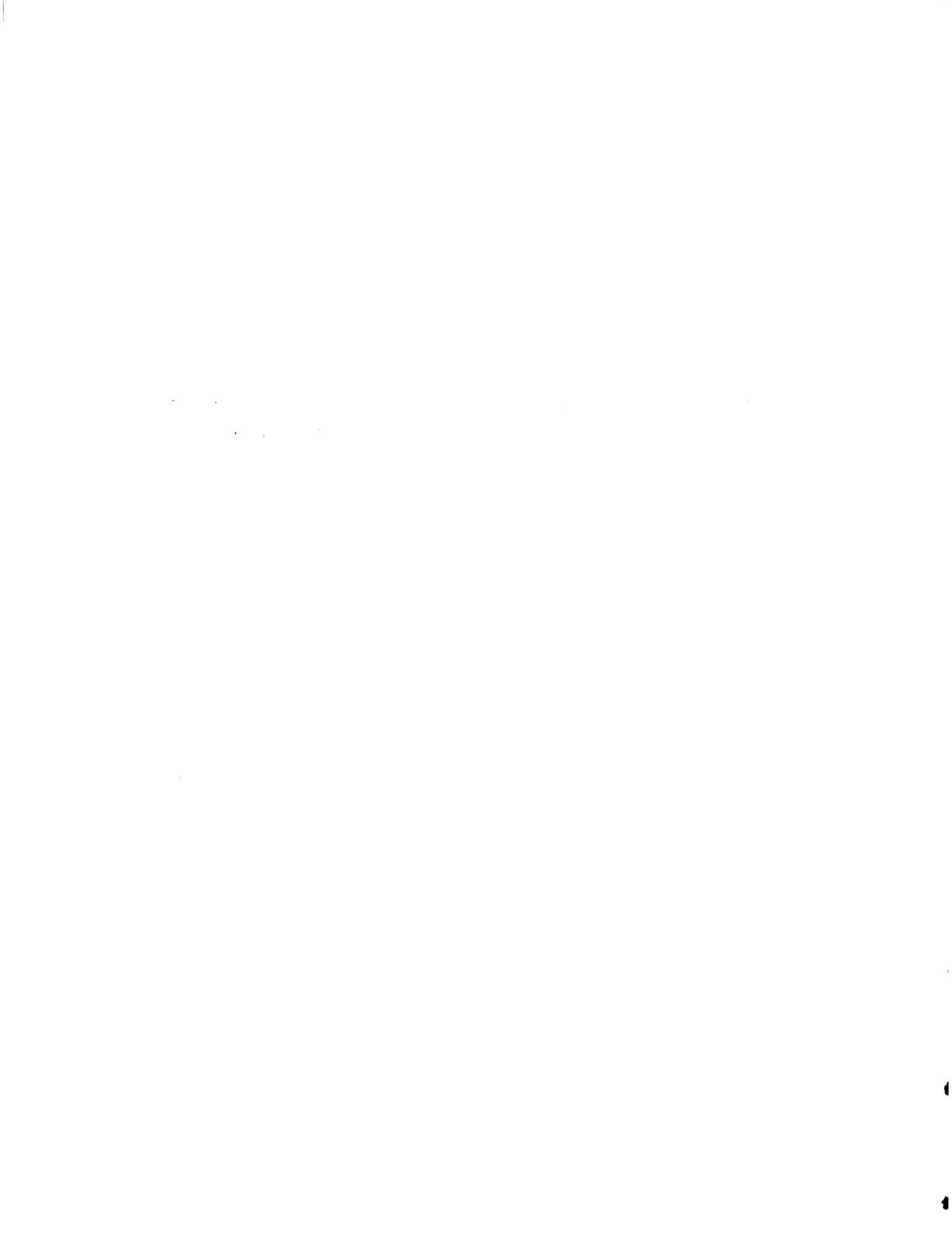
Mais:

$$\frac{dE}{dx} = - J \quad \text{pente de la ligne d'énergie}$$

$$\frac{dz_f}{dx} = - I \quad \text{pente du fond du canal}$$

Sous l'hypothèse que pour une section quelconque en régime varié la perte de charge est la même que pour un écoulement uniforme de même débit et de même section. Ce qui nous permet d'écrire:

$$J = \frac{Q^2}{C^2 S^2 R} \quad (\text{de la formule de chezy})$$



De plus $V^2 = \frac{c^2}{S^2}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (V^2) &= Q^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S^2} \right) = - Q^2 \frac{2S}{S^4} \frac{dS}{dx} \\ &= - \frac{2Q^2}{S^3} \frac{dS}{dx} \end{aligned}$$

Avec $dS = B \cdot d(d)$ il vient :

$$\frac{d}{dx} (V^2) = - \frac{2Q^2}{S^3} B \frac{d(d)}{dx}$$

Portons les valeurs dans la relation de $\frac{d\epsilon}{dx}$:

$$\frac{-Q^2}{c^2 S^2 R} = \frac{c(d)}{dx} - I \frac{Q^2 B}{g S^2} \frac{d(d)}{dx}$$

$$I \left(1 - \frac{Q^2}{c^2 S^2 R I} \right) = \frac{c(d)}{dx} \left(1 - \frac{Q^2 B}{g S^2} \right)$$



D'où nous dirons:

$$\frac{dd}{dn} = \frac{I \left(1 - \frac{Q^2}{c^2 S^2 RI}\right)}{1 - \frac{Q^2 B}{gS^3}}$$

De plus pour:

$$d \rightarrow dn \quad \frac{d(d)}{dx} \rightarrow 0$$

Et nous pouvons dire que la ligne d'eau tend asymptotiquement vers la ligne de profondeur normale dn .

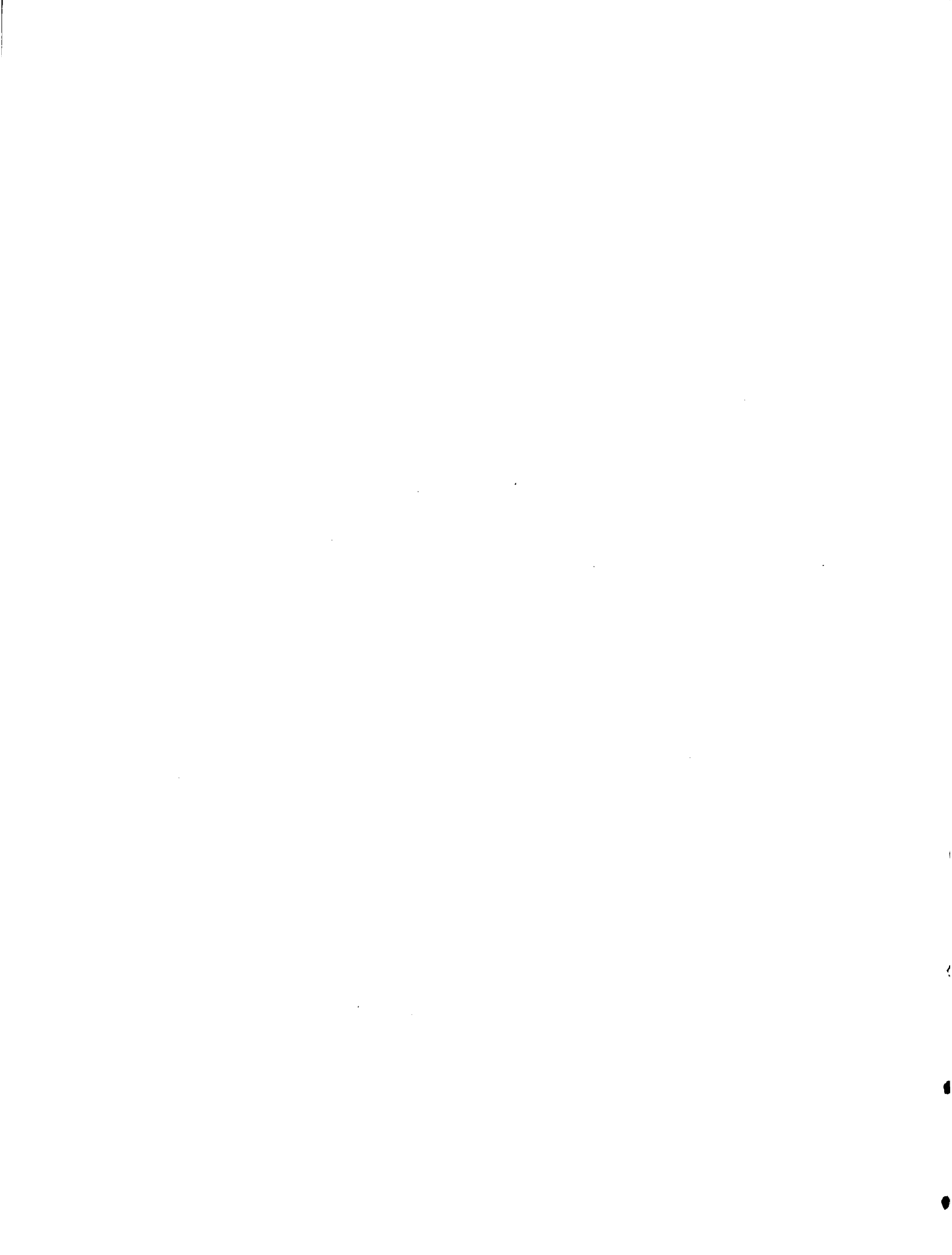
$$d \rightarrow dc \quad \frac{d(d)}{dx} \rightarrow \infty$$

Et nous pouvons dire que la ligne d'eau tend à franchir la ligne de profondeur critique dc , perpendiculairement.

$d \rightarrow \infty$ ou d croît indéfiniment

$$\frac{d(d)}{dx} \rightarrow I$$

Et la ligne d'eau tend vers une horizontale pour ce faire.



Dans la suite nous considérons que les canaux peuvent être classés en deux types:

- 1o) Les canaux à faible pente, dont la pente est inférieure à la pente critique I_c et dont la hauteur normale d_n est supérieure à la hauteur critique d_c ($d_n > d_c$) c'est le régime fluvial.
- 2o) Les canaux à forte pente, dont la pente est supérieure à la pente critique I_c et dont la hauteur normale est inférieure à la hauteur critique ($d_n < d_c$)

1 - Canaux à faible pente

Nous avons: $I < I_c$ $d_n > d_c$

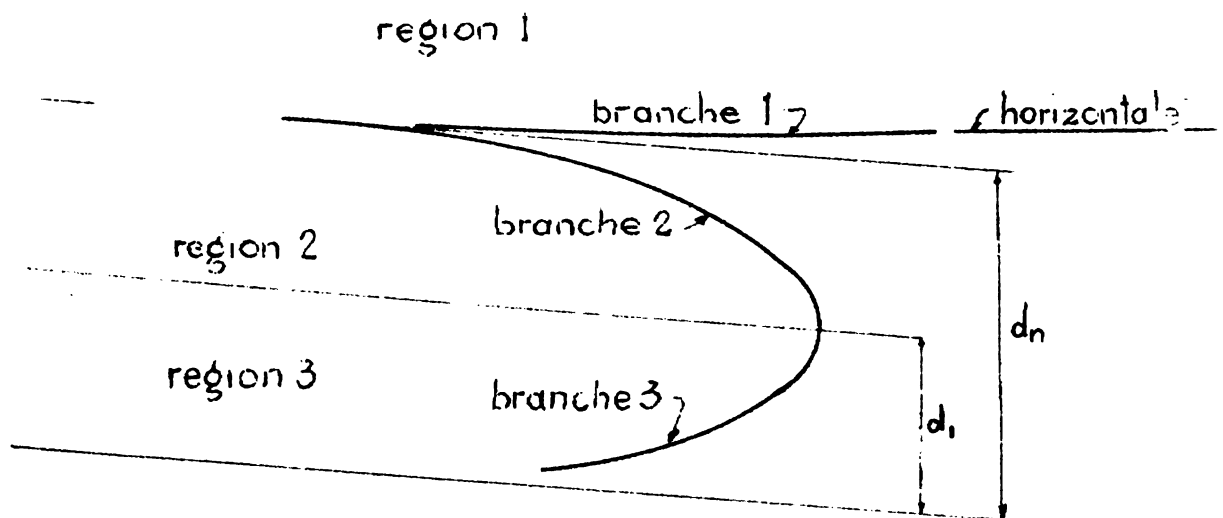
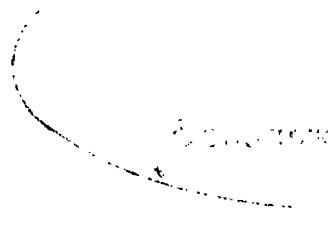


Fig. 23 Schéma de la forme de la ligne d'eau pour un canal à faible pente.

100
100
100



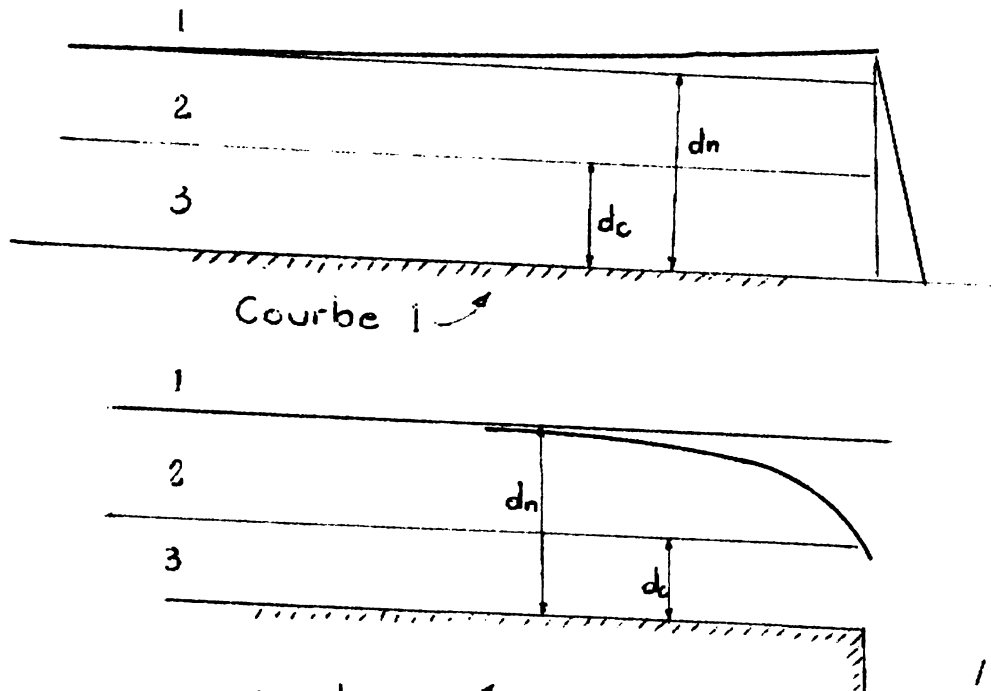
Επίλυση

Η επίλυση των προβλημάτων είναι η διαδικασία που οδηγεί στην επίλυση των προβλημάτων.

Les lignes de profondeur normale et critique divisent l'espace en trois régions: région 1, région 2, région 3, en allant de la surface libre vers le fond.

- La courbe comprend 3 branches:
 - La branche 1 dans la région 1 est concave. Elle part de l'amont asymptotiquement à la profondeur normale d_n et tend vers l'aval vers une tangente horizontale. C'est le cas le plus usité, le plus courant au point de vue pratique. Il correspond à la courbe de remous créée par un barrage dans un cours d'eau à faible pente.
 - La branche 2 dans la région 2 est convexe. Elle part de l'amont asymptotiquement à la profondeur normale d_n et se termine par une chute correspondant à la profondeur critique d_c
 - La branche 3 dans la région 3 est concave. Elle traverse la profondeur critique par un ressaut. C'est le cas d'un écoulement à grande vitesse qui entre dans un canal à faible pente. Il réjoint la profondeur normale par un ressaut.

Fig. 24 Forme de la ligne d'eau: courbe 1 et courbe 2.





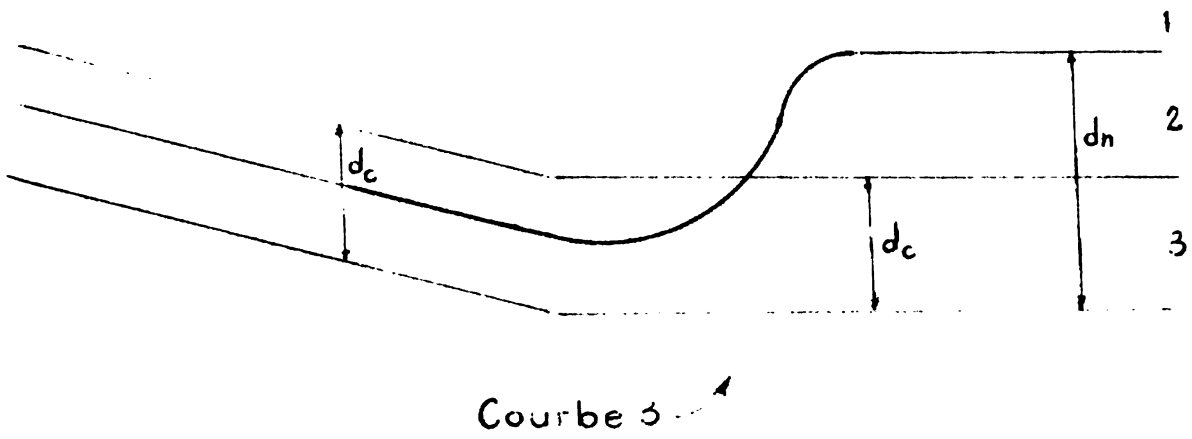


Fig. 25 Forme de la ligne d'eau: courbe 3



Canaux à forte pente

Nous avons:

$$I > I_c \quad \text{et} \quad d_n < d_c$$

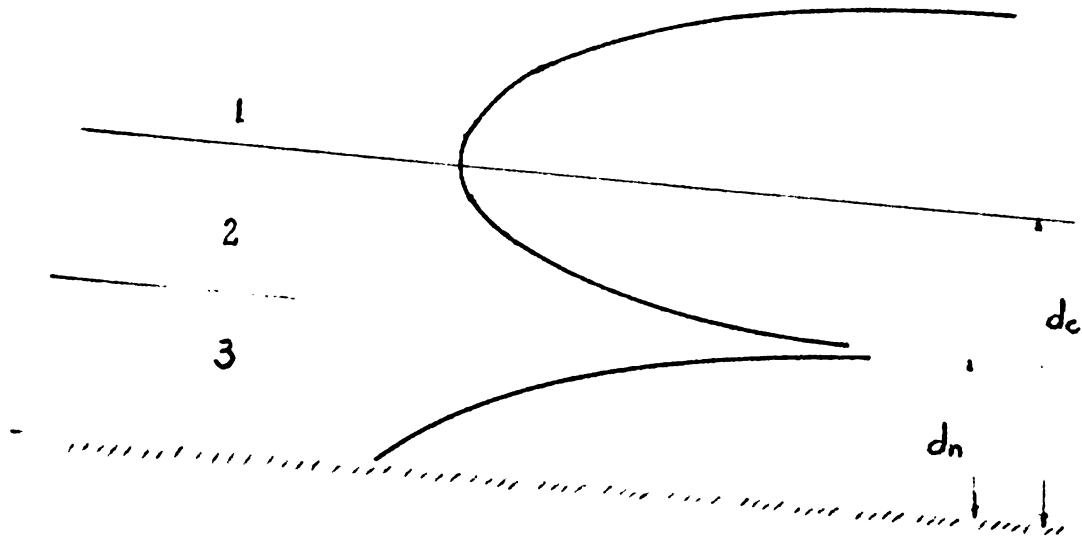


Fig. 26 Forme de la ligne d'eau, canal à forte pente

La courbe comprend trois branches:

- La branche 1 est une courbe convexe. Elle part de la ligne de profondeur critique, perpendiculairement à cette ligne et se termine tangentielle à une horizontale à la limite, après avoir exécuté un ressaut. C'est l'écoulement submergé dans un canal à forte pente.
- La branche 2 est une courbe concave. Elle part de l'extrémité d'une chute à la profondeur critique et fait la liaison à la hauteur normale d'un écoulement de profondeur $d_n < d_c$.
- La branche 3 est une courbe convexe. Elle fait la liaison entre un écoulement à grand evitesse dans un canal à forte



pente et dont la hauteur est inférieure à la hauteur normale, à l'écoulement de profondeur normale $dn < dc$. C'est le cas de l'écoulement sous une vanne débouchant dans un canal à forte pente sous une hauteur inférieure à dn .

Canaux à pente horizontale

Nous avons: $I = 0$ $dn \rightarrow \infty$

La branche 1 disparaît

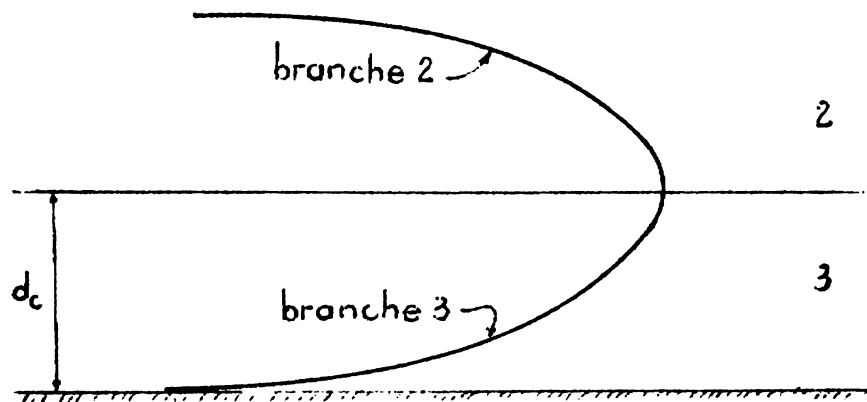
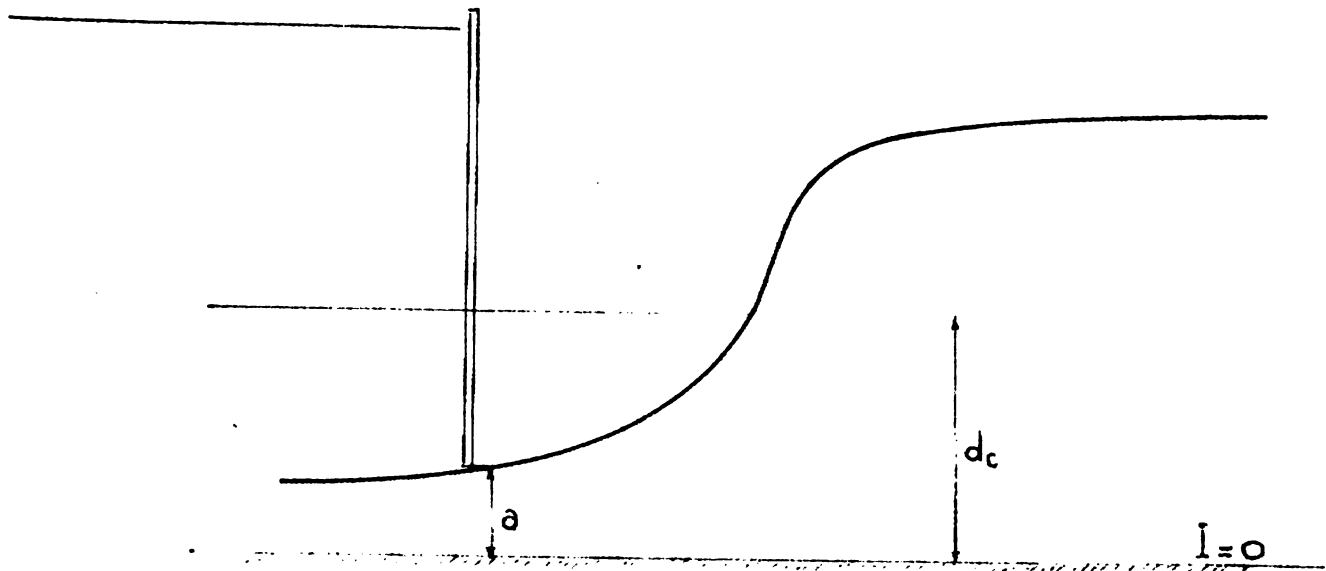
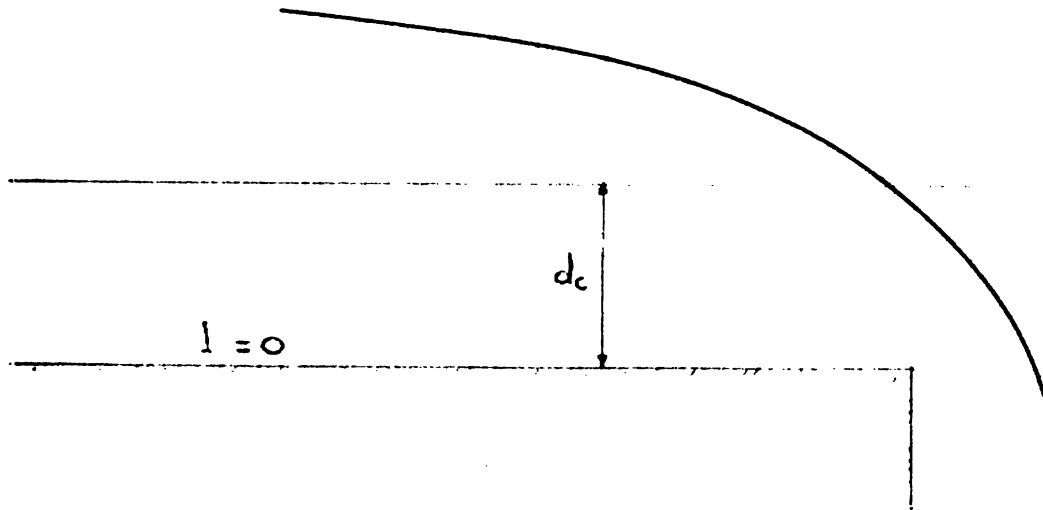


Fig. 27 Forme de la ligne d'eau, canal à pente horizontale

- La branche 2 est un remous d'abaissement. On la rencontre dans les canaux horizontaux se débouchant dans un exutoire dont la côte est variable. Il apparaît une profondeur critique à l'extrémité du canal.
- La branche 3 est un remous d'exhaussement. C'est le cas quand un dispositif oblige la profondeur à s'abaisser au-dessous de la profondeur critique. Si la surface en aval est



au-dessus de d_c il se produit un ressaut pour le passage de la profondeur critique.



Figures 28- Forme de la ligne d'eau, courbe 1 et courbe 3.



Canaux à pente critique

La courbe de la ligne d'eau est une horizontale. Elle fait avec la ligne de profondeur critique un angle correspondant à la pente $I = I_c$ du fond.

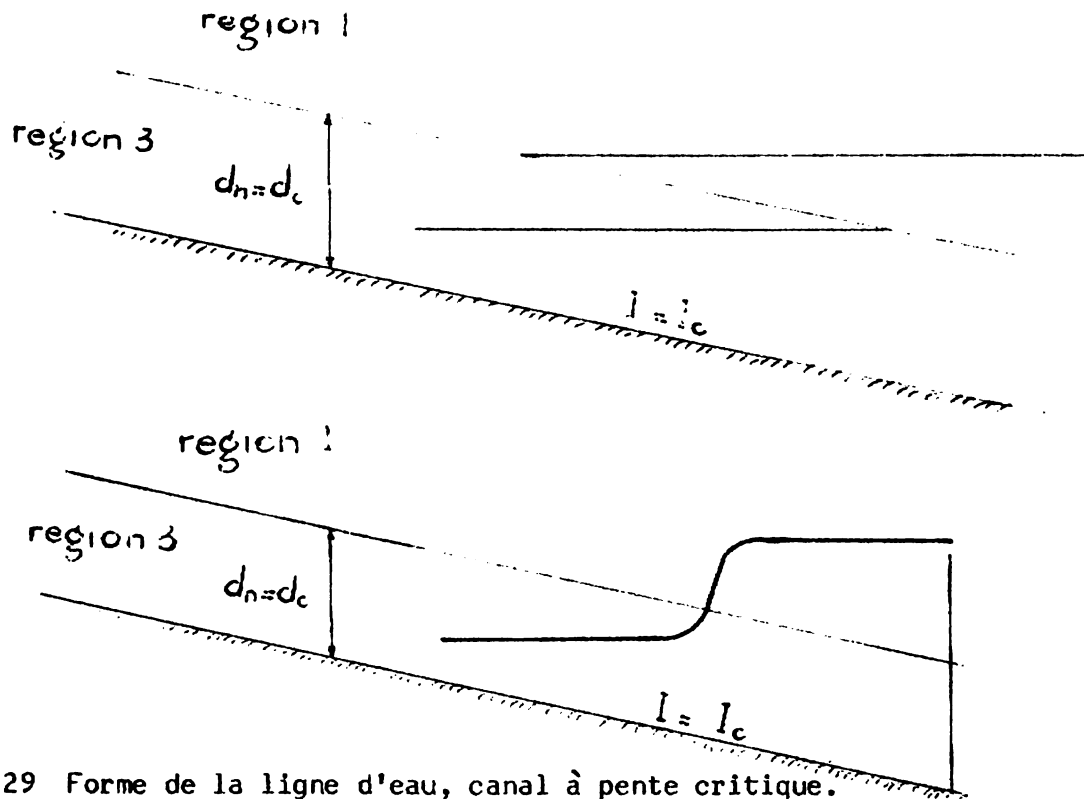


Fig. 29 Forme de la ligne d'eau, canal à pente critique.

Canaux à pente ascendante

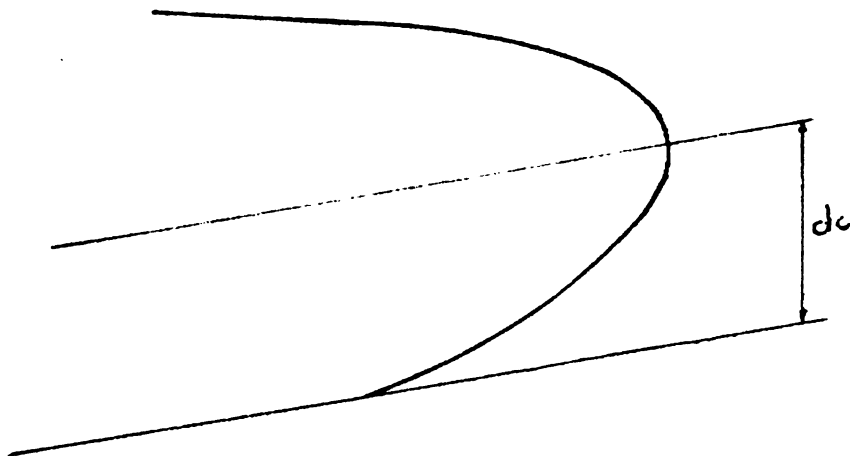


Fig. 30 Forme de la ligne d'eau, canal à pente ascendante.



La région 1 disparaît, dn n'existe pas et la branche 1 aussi. Il reste la région 2 et 3.

- La branche 2 correspond à un remous d'abaissement comme précédemment. Elle est presque identique à la branche 2 d'un canal à pente nulle ($I = 0$)
- La branche 3 correspond à un remous d'exhaussement, elle est presque identique à la branche 3 d'un canal à pente nulle ($I = 0$). Il y a aussi présence de ressauts au passage de la profondeur critique.

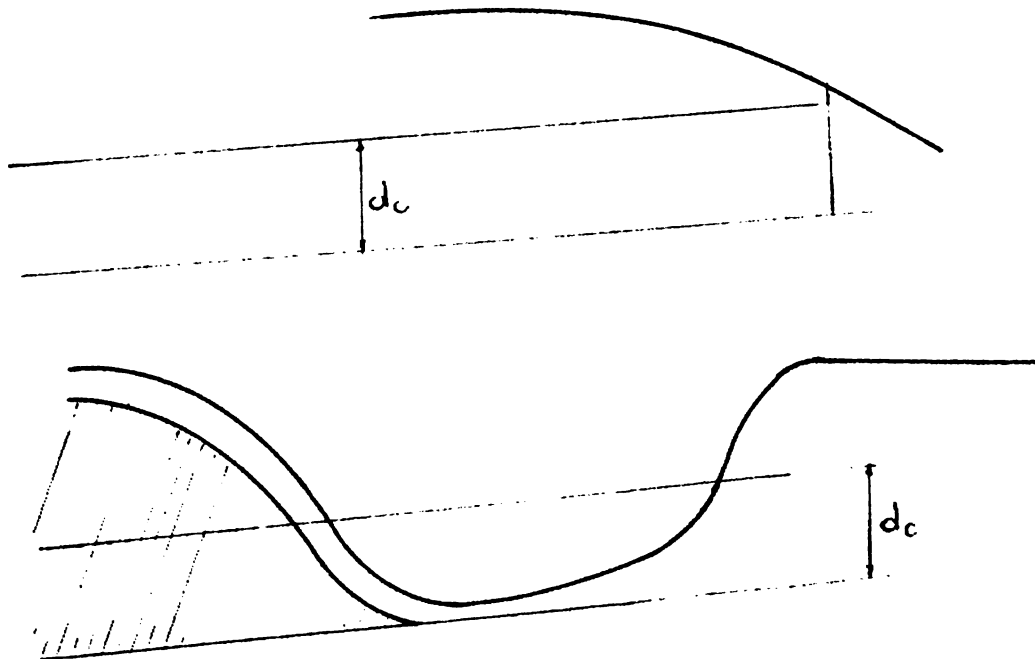


Fig. 31 Forme de la ligne d'eau, courbe 2 et courbe 3

Calcul de la ligne d'eau

Le calcul des différentes lignes d'eau dont nous venons de voir les formes peuvent se faire à partir de l'expression de $\frac{d(d)}{dx}$ que nous



avons établi auparavant à savoir:

$$\frac{d(d)}{dx} = \frac{I \left(1 - \frac{Q^2}{C^2 S^2 R I} \right)}{1 - \frac{Q^2 B}{g S^3}}$$

Plusieurs méthodes ont été développées pour ces calculs. Parmi lesquelles: celle de Bresse; celle de Bakhmeteff; celle des approximations successives. Nous allons présenter la méthode de Bakhmeteff, plus générale que celle de Bresse; et la méthode des approximations successives.

Méthode de BAKHMETEFF

Considérons l'équation générale du mouvement sous la forme:

$$\frac{d(d)}{dn} = \frac{I \left(1 - \frac{Q^2}{C^2 S^2 R I} \right)}{1 - \frac{Q^2 B}{g S^3}} = \frac{I \left(1 - \frac{J}{I} \right)}{1 - \frac{Q^2 B}{g S^3}}$$

Dans laquelle:

I = pente du lit

d = profondeur d'eau dans la section d'abscisse x

$J = \frac{Q^2}{C^2 S^2 R}$ = perte de charge unitaire ou pente hydraulique de l'écoulement.



- Q = débit supposé constant
 S = section mouillée à l'abscisse x
 B = largeur superficielle de la section mouillée
 C = coefficient dépendant de la nature des fonds et parois.

Bakhmeteff a introduit la notion de débitance qu'il désigne par :

$$K = CS\sqrt{R} \quad (\text{tiré de la formule générale de Chezy})$$

$$\text{D'où} \quad Q = K\sqrt{I} \quad \text{ou} \quad K = \frac{Q}{\sqrt{I}}$$

K dépend de la section et de la nature des parois.

De plus Bakhmeteff a :

- désigné par $\lambda = \frac{I}{I_c}$ le rapport des pentes du lit et critique qu'il estime, varie peu avec la profondeur d

- posé $K = Ad^N$ dans la majorité de cas

A = constante

N = exposant hydraulique de la section considérée varie entre 2.8 et 5.4



Après des transformations Bakhmeteff est arrivé à l'expression suivante:

$$x_1 - x_0 = \frac{dn}{I} \left[1 - 0 - (1 - \beta) (\beta_1 - \beta_0) \right]$$

Dans laquelle:

$$\eta = \frac{d}{dn}$$

$$= \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta - 1} \quad \text{dont les valeurs sont données par les tables de Bakhmeteff établies pour l'intégrale.}$$

x = abscisse de la section considérée

Les indices 0 et 1 désignent les valeurs des paramètres dans la section de même indice.

En principe β doit rester presque constant, si elle varie beaucoup on doit diminuer les intervalles d'intégration, c'est à dire diminuer les accroissements de d .

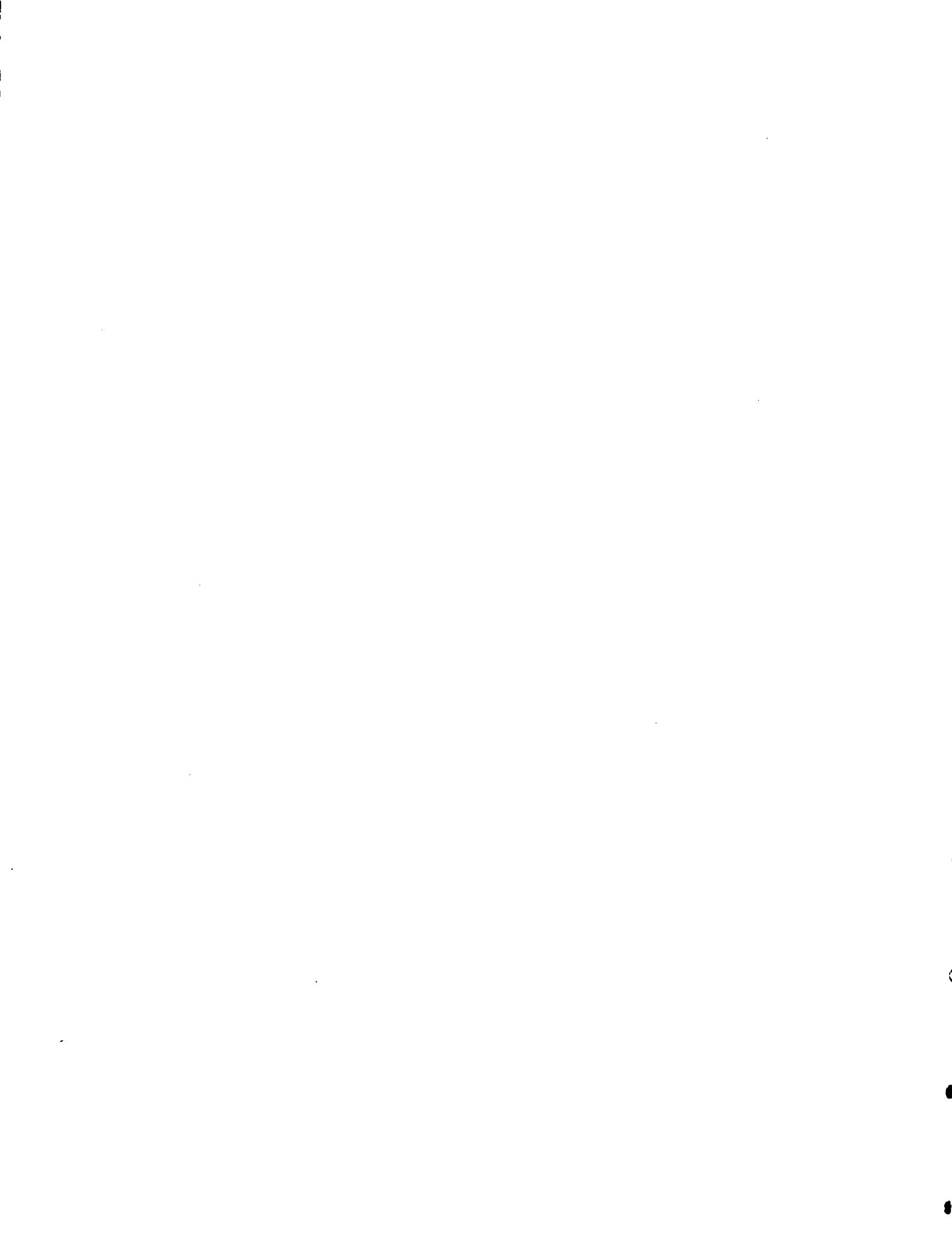
Simplification de la méthode

*

Dans le cas où l'on peut négliger la variation de l'énergie cinétique $d\left(\frac{V^2}{2g}\right)$ la relation de Bakhmeteff devient:

$\frac{d}{2g}$

$$x_1 - x_0 = \frac{dn}{I} (1 - 0)$$



Dans laquelle:

$$\phi(\eta) = \eta + \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta^n - 1}$$

Des tables donnent les valeurs de ϕ en fonction de n et η

Procédure pour utiliser la méthode

- On détermine d'abord d_n et d_c pour la section
- On calcule ou fixe d_0 dans la section de contrôle S_0 ou section de départ
- On trace plusieurs courbes donnant les valeurs de certains paramètres qui vont être utilisés dans les calculs, en fonction de d . Savoir:

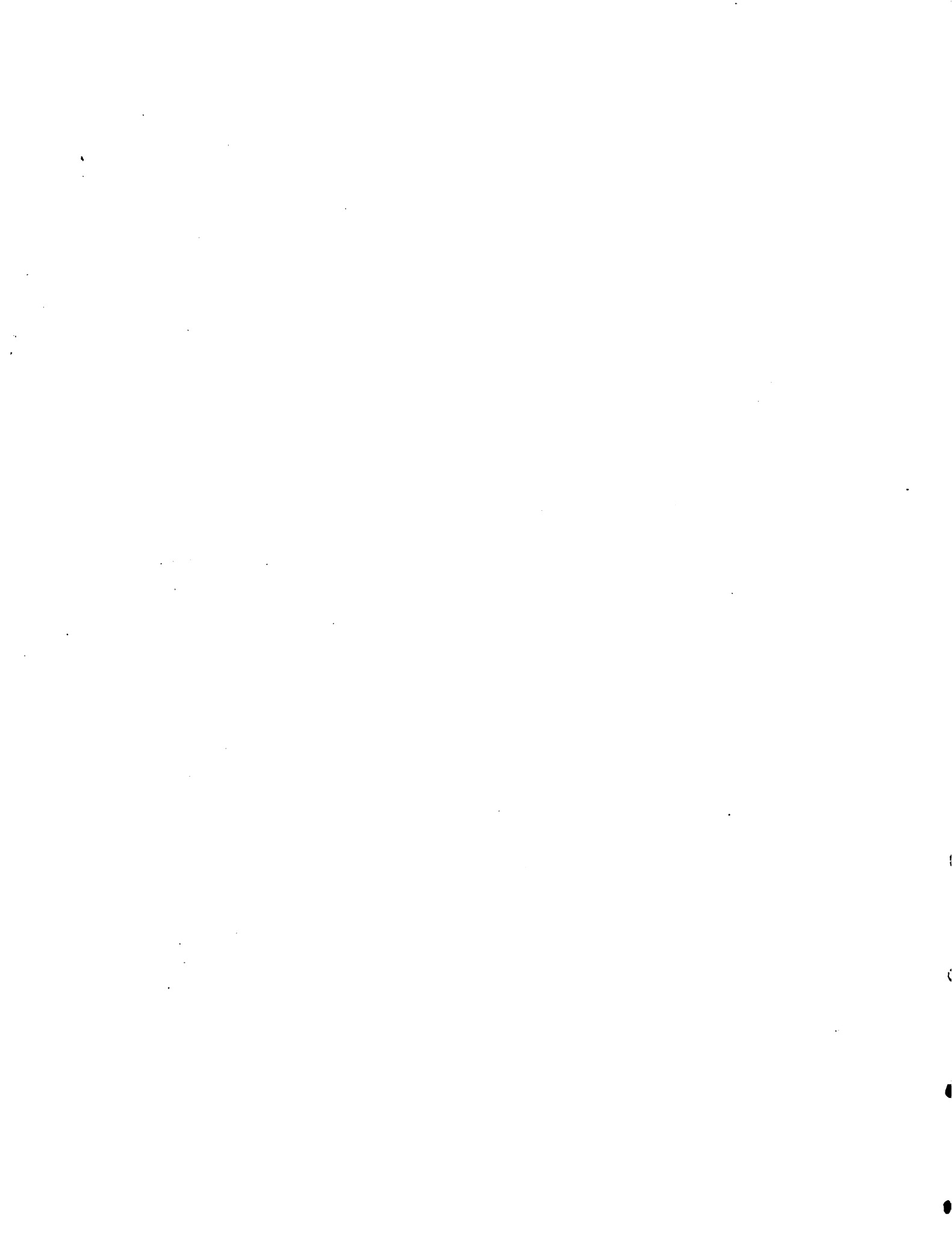
$$\begin{aligned} \text{la courbe } K(d) &= CS\sqrt{R} \\ I_c &= \frac{g S^3}{K^2 B} \end{aligned}$$

$$\beta(h) = \frac{I}{I_c}$$

- On calcule l'exposant hydraulique N de la façon suivante:

Sur un papier logarithmique et avec les valeurs de K tirées de la courbe $K(d)$, on trace la courbe $\log K = f(\log d)$ en portant en ordonnée les valeurs $\log K$ et en abscisses les valeurs de $\log d$. Cette courbe est pratiquement une droite qui fait avec l'axe des abscisses un angle α dont $\text{tg } \alpha$ est le coefficient angulaire de la droite.

$$\text{On a: } \text{Tg } \alpha = \frac{N}{2} \quad \text{et } N = 2 \text{tg } \alpha$$



Cela vient du fait que de la relation:

$$K^2 = Ad^N \quad \text{nous avons:}$$

$$2 \log K = \log A + N \log d$$

$$\log K = 1/2 \log A + \frac{N}{2} \log d$$

On voit bien que $\frac{N}{2}$ est le coefficient angulaire de la droite tracée.

Maintenant que l'on dispose de tous ces éléments on passe à la détermination de la courbe proprement dite.

- On part de la section de contrôle S_0 , on détermine d_0 et

$$\eta_0 = \frac{d_0}{dn}$$

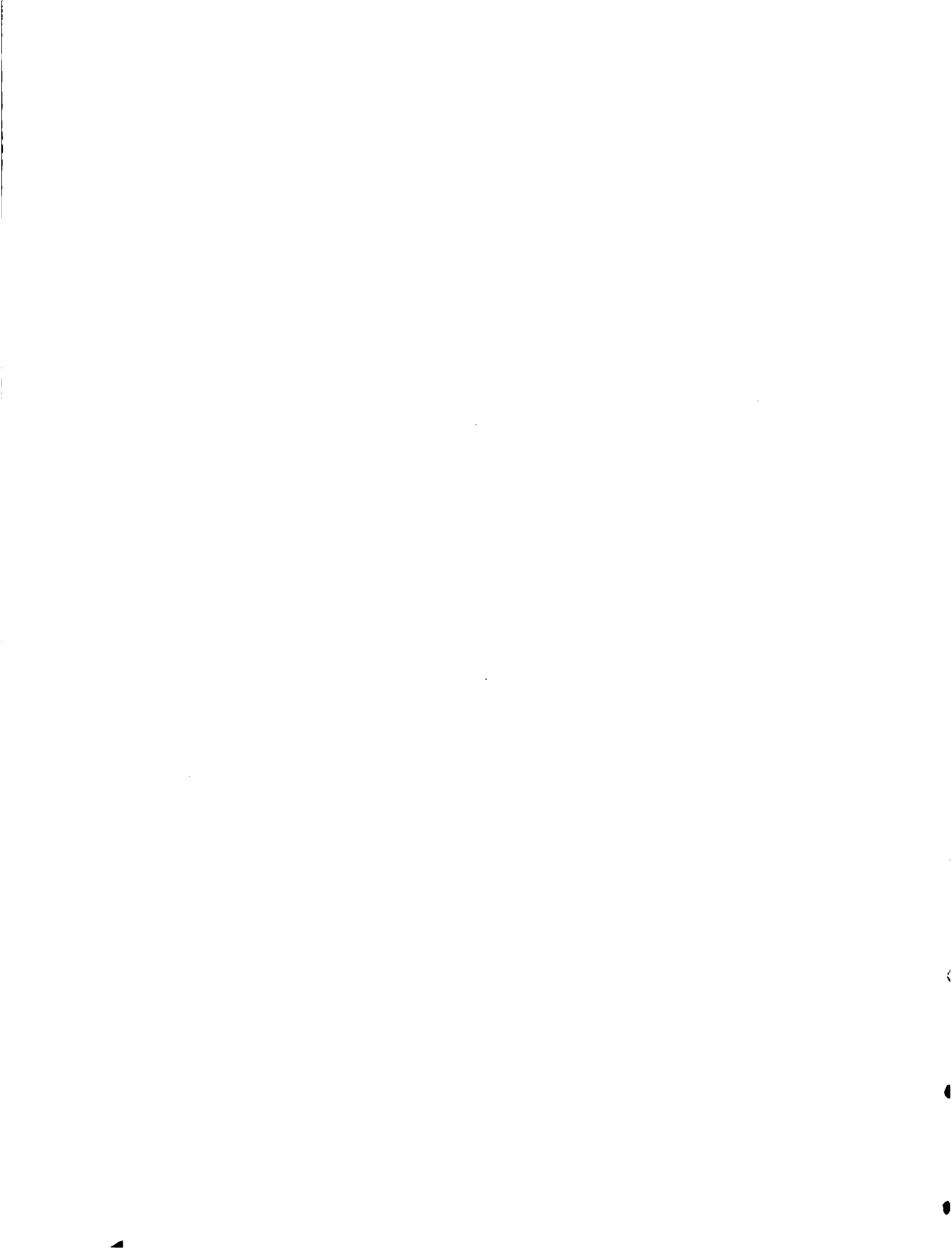
Puis β_0 ; n ; β_0 à l'aide des courbes et la table Backmeteff

- On choisit une valeur de la profondeur d'eau d_1 voisine de d_0 et l'on détermine de même les valeurs η_1, β_1, β_1

On pose: $\beta' = \frac{\beta_0 + \beta_1}{2}$

- On porte toutes ces valeurs dans l'expression

$$x_1 - x_0 = \dots\dots$$



Ce qui détermine l'abscisse de section S_1 de profondeur d'eau d_1

Méthode par approximations succesives

Plusieurs méthodes par approximations successives ont été mises au point. En voici l'une d'elle.

Partant de l'équation générale du courant rectiligne en écoulement permanent.

$$\sin i - \frac{1}{\gamma} \frac{dp_o}{ds} = \frac{B}{S} \phi(u) + \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

En faisant les hypothèses suivantes:

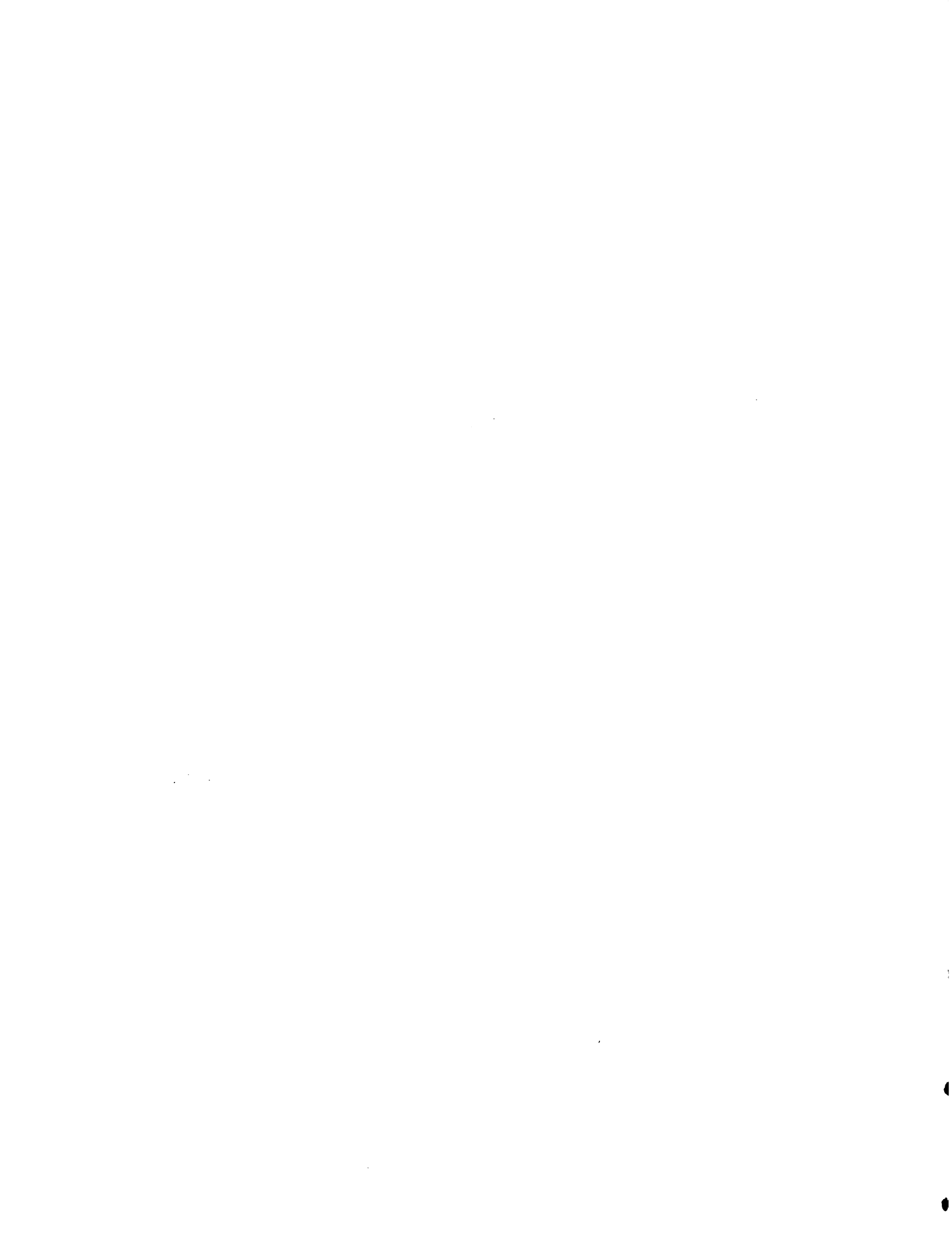
- L'angle i de la surface libre est petite donc $\sin i = I'$ pente de la surface libre
- L'axe des s est perpendiculaire aux sections droites et se trouve dans la surface libre donc:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dp_o}{ds} = 0$$

$$- \phi(u) = bV^2$$

L'équation s'écrira:

$$I' - \frac{B}{S} bV^2 + \alpha \frac{d}{ds} \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$



où:

$$I'd_s = \frac{B}{S} bV^2 d_s + \alpha d \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

Posons $V = \frac{Q}{S}$ et $\alpha = 1$

Après intégration entre deux profils S_0 et S_1 distant de L et transformation, on arrive à l'expression

$$I'L = \frac{bQ^2B}{2} \left(\frac{B_0}{S_0^3} + \frac{B_1}{S_1^3} \right) + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_0^2} \right)$$

C'est cette équation que l'on résoud par approximation successives

- On part de la section contrôle S_0 pour laquelle on détermine d_0 ; S_0 ; B_0 .
- On choisit une distance L sur le fond du lit de la rivière et à cette distance on détermine la section S_1 pour l'établissement du profil en travers.
- On choisit d_1 comme hauteur d'eau dans S_1 et l'on détermine pour d_1 les éléments S_1 ; B_1
- On porte tous les éléments ainsi déterminés dans l'équation Soit m_1 la valeur du 1er membre et m_2 la valeur du 2^e membre si $m_1 \neq m_2$ on recommence les mêmes calculs avec une autre profondeur d et ainsi de suite jusqu'à obtenir des valeurs satisfaisantes, et l'on passe à une autre section. S_2 .



Ressaut hydraulique

Le ressaut est une surélévation brusque de la surface libre d'un écoulement permanent qui le fait passer du régime torrentiel au régime fluvial. Sa position est fixée dans le lit de l'écoulement.

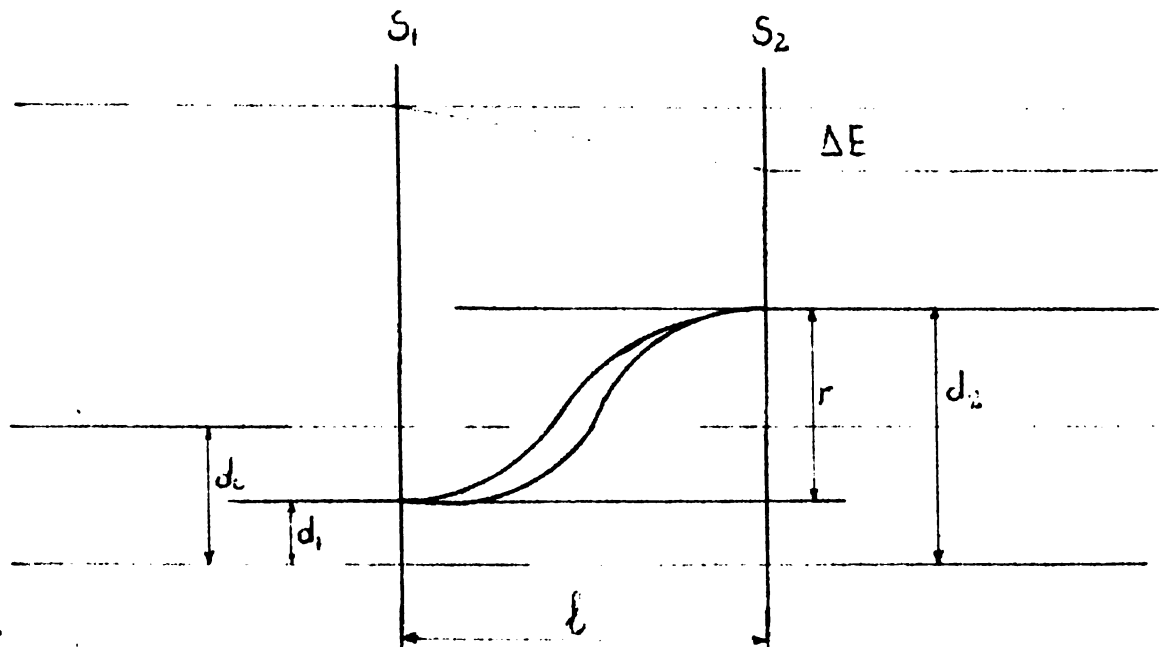


Fig. 32- Schéma du ressaut hydraulique

Considérons deux sections S_1 et S_2 ; S_1 à l'amont du ressaut du côté de l'écoulement torrentiel, S_2 à l'aval, du côté de l'écoulement fluvial. Les filets sont considérés comme parallèles dans ces sections.

- On appellera les profondeurs d_1 et d_2 dans ces sections les profondeurs conjuguées.
- La distance l séparant les 2 sections est appelée longueur du ressaut.
- La différence $r = d_2 - d_1$ est appelée hauteur du ressaut

- en appelant les individus a_1 et a_2 dans les sections
les profils confondus.

- la distance L séparant les 2 sections est appelée longueur
de ressort.

- la différence $a_2 - a_1$ est appelée hauteur de ressort.

27

- La différence $\Delta E = E_1 - E_2$ est la perte d'énergie ou perte de charge du ressaut.

Longueur du Ressaut

Il n'existe pas de formule exacte donnant la longueur du ressaut. Elles sont toutes empiriques ce que nous disposons. Pour les sections rectangulaires on a proposé:

$$l = 5 d_2$$

$$l = 6 (d_2 - d_1)$$

En section trapézoïdale:

$$l = 5 d_2 \left(1 + \frac{4 \sqrt{l_2 - l_1}}{l_1} \right)$$

l_1 = Largeur superficielle à l'amont

l_2 = Largeur superficielle à l'aval

Profondeurs conjuguées du Ressaut

Nous utiliserons le théorème de la quantité de mouvement ou théorème d'Euler. Et nous faisons les approximations suivantes:

- Le fond du canal est horizontal
- Les pertes de charge par frottement sont négligeables
- La vitesse dans les sections S_1 et S_2 sont parallèles et égales à la vitesse moyenne



Sous ces conditions le théorème d'Euler appliqué en projection sur l'axe du canal, horizontal, les seules forces extérieures étant les forces de pression de la masse d'eau sur les sections S_1 et S_2 , donnera:

$$\frac{Q^2}{gS_1} + dq_1 S_1 = \frac{Q^2}{gS_2} + dq_2 S_2$$

dq_1 et dq_2 = profondeur des centres de gravité des sections.

Nous voyons donc que l'Impulsion se conserve d'une section à une autre.

La résolution de l'équation ci-dessus par approximations successives donnent les hauteurs conjuguées d_1 et d_2 .

Si nous traçons la courbe $F(d)$ de l'impulsion, nous aurons les points M_1 et M_2 correspondants aux profondeurs conjuguées d_1 et d_2 sur une même parallèle à l'axe des d et de part et d'autre du point C représentant la profondeur critique

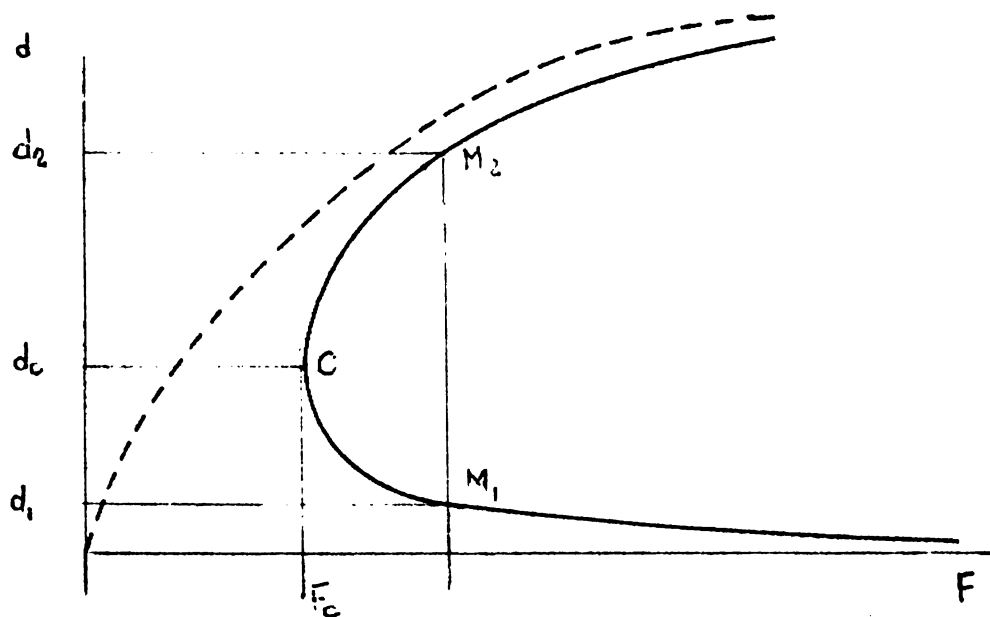


Fig. 33 - Schéma de la force hydraulique $F = f(d)$



Cas de section rectangulaire

Dans le cas d'une section rectangulaire et opérant avec le débit unitaire la relation de l'impulsion précédente s'écrit:

$$\frac{q^2}{gd_1} + \frac{d_1^2}{2} = \frac{q^2}{gd_2} + \frac{d_2^2}{2}$$

$$d_2^2 + d_1 d_2 - \frac{2q^2}{gd_1} = 0$$

D'où:

$$d_2 = \frac{d_1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8q^2}{gd_1^3}} - 1 \right)$$

Relation qui permet de calculer une profondeur conjuguée en fonction de l'autre et du débit unitaire.

Introduisons la profondeur critique dans les relations. Nous avons:

$$\frac{q^2}{g} = d_c^3 \quad \text{il vient}$$

$$d_2^2 + d_1 d_2 = \frac{2d_c^3}{d_1}$$

$$d_1 d_2^2 + d_1^2 d_2 = 2d_c^3$$

$$d_1 d_2 (d_2 + d_1) = 2d_c^3$$



Perte de charge dans le ressaut hydraulique

La perte de charge est donnée par la différence d'énergie:

$$E_1 - E_2 = \left(z_1 + d_1 + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + d_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right)$$

z_1 et z_2 étant les côtes du fond aux sections S_1 et S_2

On peut sur un même graphique tracer la courbe de l'Impulsion et la courbe d'Énergie. On détermine alors directement sur le graphique la perte de charge.

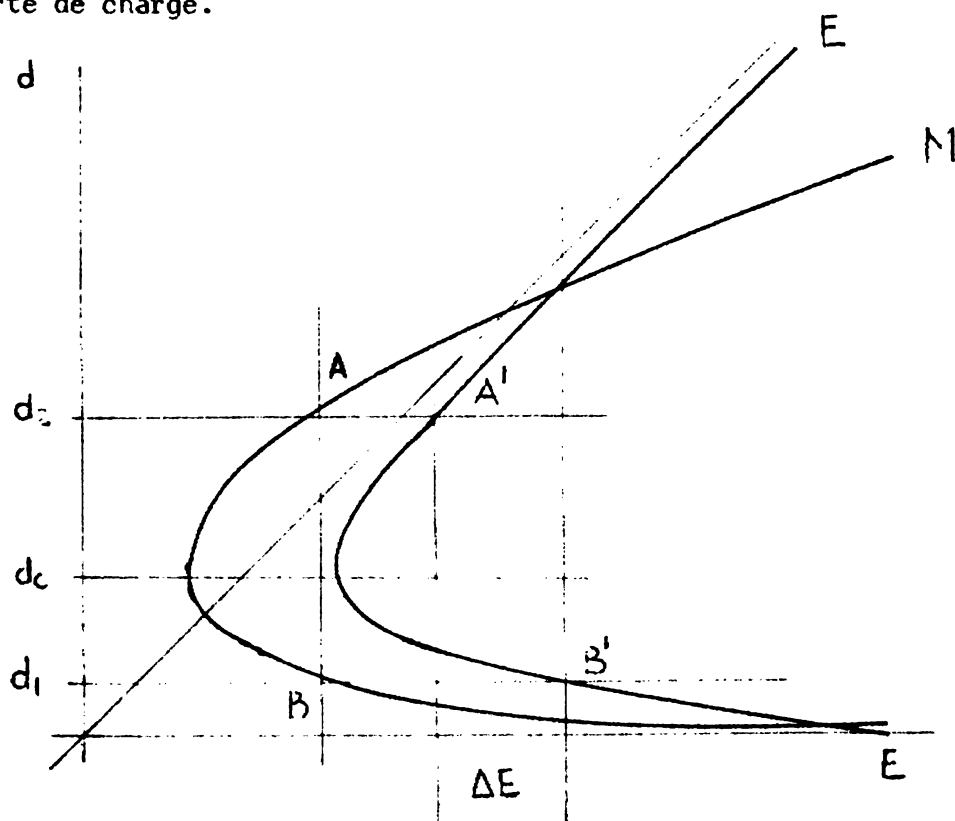


Fig. 34 Schéma de la force et de l'énergie spécifique pour calculer la perte de charge dans le ressaut hydraulique.



Section rectangulaire

Dans le cas d'une section rectangulaire et lit horizontal la perte de charge est donnée par:

$$\Delta E = \left(d_1 + \frac{q^2}{2gd_1^2} \right) - \left(d_2 + \frac{q^2}{2gd_2^2} \right)$$

Adjoignant à cette relation, la relation trouvée précédemment à savoir:

$$d_2^2 + d_1 d_2 - \frac{2q^2}{gd_1} = 0$$

D'où nous tirons $\frac{q^2}{2g}$ et après transformations nous trouvons

$$\Delta E = \frac{(d_2 - d_1)^3}{4 d_1 d_2}$$

En introduisant d_c on trouvera:

$$E = (d_1 + d_2) \left(\frac{d_2 - d_1}{2d_c} \right)^3$$

Localisation du ressaut

Le ressaut se produit toujours au cours du passage d'un régime torrentiel à un régime fluvial. Pour le localiser:



- On trace la ligne d'eau amont du régime torrentiel
- On trace la ligne d'eau aval du régime fluvial.
- On trace la ligne des profondeurs conjuguées

Le point de rencontre de la ligne des profondeurs conjuguées amont ou du régime torrentiel avec la ligne d'eau aval ou du régime fluvial donnent l'emplacement du ressaut et vice-versa.



CHAPITRE VI

REGIMES VARIÉS ET SINGULARITES

Quand on introduit une singularité quelconque dans un écoulement en régime fluvial il peut se produire à l'aval immédiat de la singularité deux situations:

- 1) Le niveau de la surface libre de l'écoulement à l'aval immédiat de la singularité tombe au-dessous du niveau critique avec apparition d'une lame torrentielle et d'une section critique. C'est l'écoulement dénoyé.
- 2) Le niveau de la surface libre de l'écoulement à l'aval immédiat de la singularité reste supérieur au niveau critique. C'est l'écoulement noyé

Nous allons étudier quelques singularités eu égard aux régimes variés.

a) Retrécissement long

Le retrécissement long est la diminution de section d'un canal dans un tronçon assez long pour que des mouvements graduellement variés puissent apparaître. Nous allons considérer un canal de section rectangulaire et dans lequel l'écoulement est fluvial sur toute la longueur, et dans la section retrécie, et dans la section non retrécie et le convergent. L'examen de la ligne d'eau révèle ceci.

- La hauteur d_2 dans le tronçon retréci est plus grande que d_1 dans la section non retrécie. Appelons y la différence de profondeur nous avons:

$$y = d_2 - d_1$$



- Les deux tronçons l_1 et l_2 sont reliés par un convergent ABCD. Il se produit dans le convergent un exhaussement supplémentaire qui produit en AB entrée du convergent une profondeur d'eau d_1' plus grande que d_2 et aussi que d_1
On a:

$$d_1' > d_2 > d_1$$

- La ligne d'eau présente de l'entrée du convergent vers l'amont une courbe de remous d'exhaussement qui va se raccorder à l'amont au niveau normal d_1

Nous voulons déterminer les valeurs de $y = d_2 - d_1$.

de d' et esquisser la courbe de remous

Calcul de $y = d_2 - d_1$

Considérons les deux sections rectangulaires, de dimensions $b_1 \times d_1$ et $b_2 \times d_2$ pour le débit Q . Faisons l'approximation que les largeurs b_1 et b_2 sont suffisamment grande par rapport à d_1 et d_2 pour que l'on puisse poser que le rayon hydraulique soit égale à la hauteur d'eau:

$$R = d$$

Par ailleurs le régime est permanent et Q constant, et en supposant la rugosité des parois constant.

Nous pouvons poser:

$$v = c\sqrt{RI} \quad \text{ou} \quad v^2 = c^2RI$$

$$\frac{V^2}{c^2} = RI \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = b$$

$$bV_1^2 = R_1 I = d_1 I$$

$$bV_2^2 = R_2 I = d_2 I$$

D'où

$$\frac{V_1^2}{V_2^2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Par ailleurs:

$$Q = b_1 d_1 V_1 = b_2 d_2 V_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{b_2 d_2}{b_1 d_1} = \frac{V_1^2}{V_2^2} = \frac{b_2^2 d_2^2}{b_1^2 d_1^2}$$

Comparant les 2 valeurs de $\frac{V_1^2}{V_2^2}$ il vient:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{b_2^2 d_2^2}{b_1^2 d_1^2} \quad \text{ou} \quad b_1^2 d_1^3 = b_2^2 d_2^3$$



D'où:

$$d_2 = d_1 \sqrt[3]{\frac{b_1^2}{b_2^2}}$$

$$d_2 - d_1 = d_1 \left(\sqrt{\frac{b_1^2}{b_2^2}} - 1 \right)$$

$$y = d_2 - d_1 = d_1 \left(\sqrt{\frac{b_1^2}{b_2^2}} - 1 \right)$$

$$y = d_1 \left(\sqrt[3]{\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2} - 1 \right)$$



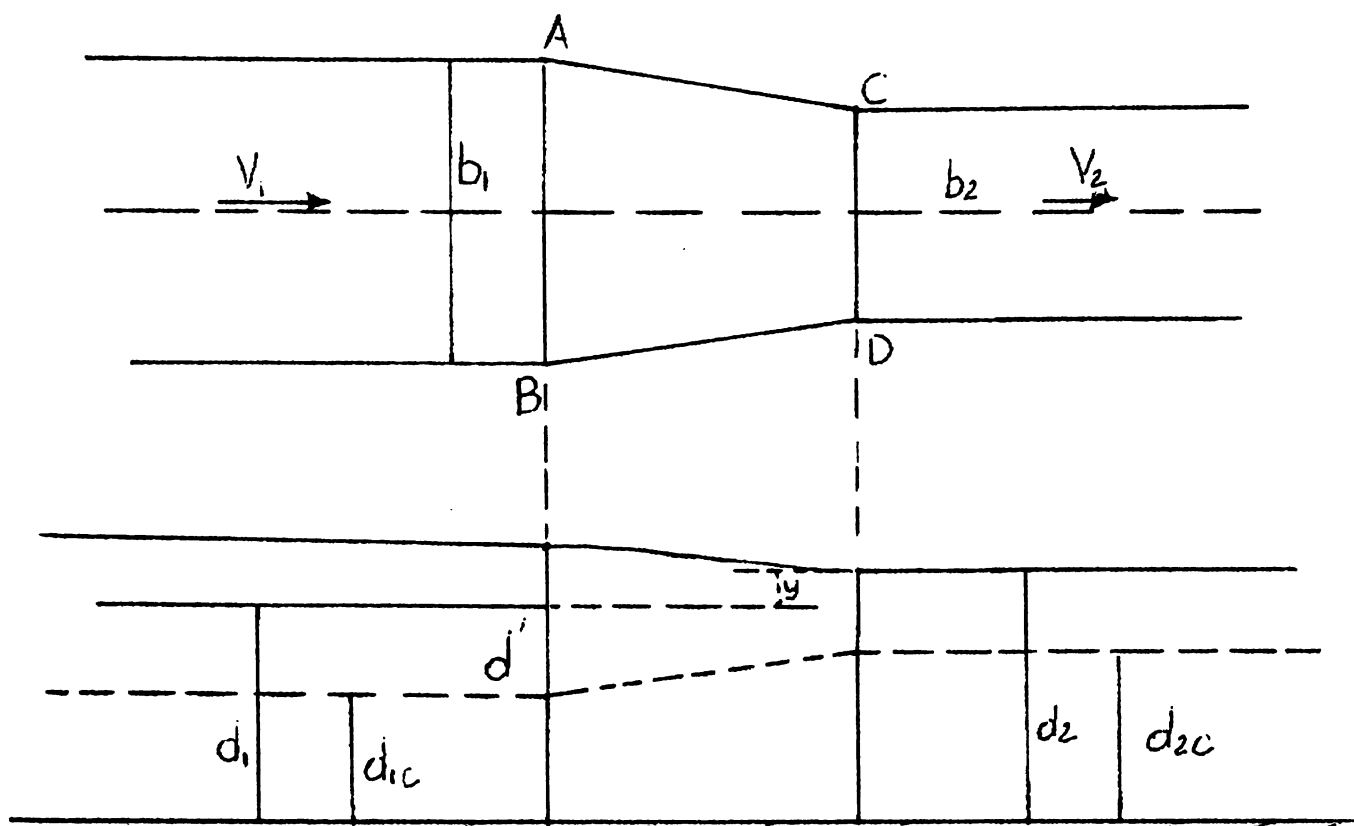


Fig. 35 Schéma de l'effet d'une variation de la section sur l'écoulement.

Soit un canal rectangulaire de largeur b_1 et de profondeur d'eau normale d_1 pour un débit Q (régime uniforme) qui se retrécit en un canal rectangulaire de largeur b_2 et de profondeur normale d_2 pour le même débit Q (régime uniforme).

Soient:

- I = Pente du canal inférieur à la pente critique
- V_1 = Vitesse dans le tronçon amont de largeur b_1
- V_2 = Vitesse dans le tronçon aval de largeur b_2

Calcul de d'

Nous allons appliquer le théorème de Bernoulli entre: AB et CD, en faisant les approximations suivantes:

- Le tronçon est horizontal, nous négligeons le dénivelé
- Nous négligeons les pertes de charge par frottement sur les parois, il vient:

$$d' + \frac{v'^2}{2g} = d_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

D'où :

$$d' - d_2 = \frac{1}{2g} (v_2^2 - v'^2)$$

Nous avons en plus:

$$v b_1 d' = v_2 b_2 d_2$$

$$v' = \frac{v_2 b_2 d_2}{b_1 d'}$$

$$d' - d_2 = \frac{1}{2g} \left(v_2^2 - \frac{v_2^2 b_2^2 d_2^2}{b_1^2 d'^2} \right)$$

On tire d' de la relation précédente par approximations successives.



Courbe de remous de AB vers l'amont

Connaissant la hauteur d' en A B , on part de cette section comme section de contrôle et on détermine la courbe de remous de AB vers l'amont par les méthodes que nous connaissons. C'est un remous d'exhaussement classique.

b) Elargissement long

Dans le cas de l'élargissement long nous avons:

- Un remous d'abaissement de l'amont vers le divergent
- Un remous d'exhaussement dans le divergent
- L'écoulement normal dans la section élargie

Soit y la différence de profondeur entre la hauteur normale d_1 dans la section amont et d_2 la hauteur normale dans la section aval nous avons:

$$y = d_1 - d_2 = d_1 \left(1 - \sqrt[3]{\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2} \right)$$

b_1 = Largeur du canal amont

b_2 = Largeur du canal aval

Dans le divergent il y a une perte de charge

$$j = (0.10 \text{ à } 0.20) \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} \right)$$

V_1 = Vitesse à l'entrée du divergent

V_2 = Vitesse à sortie du divergent



c) Canal Venturi ou Parshall

Le canal-Venturi ou Parshall est un dispositif de mesure qui utilise le retrécissement de la section transversale du canal comme base de mesure. Ce dispositif fut amélioré et vulgarisé par l'américain Ralph Parshall, en 1920.

L'appareil est constitué par un convergent qui réduit progressivement la section du canal jusqu'à la section retrécie appelée col:

- de la section retrécie
- et d'un divergent qui permet de rejoindre la section initiale.

L'écoulement peut être noyé ou dénoyé

1) Ecoulement noyé

Soient:

- d_1, b_1, V_1 les hauteurs d'eau, largeur et vitesse dans le canal à l'amont de l'appareil.
- d_2, b_2, V_2 les mêmes éléments dans le col.

L'appareil est supposé horizontal, le débit est donné par:

$$Q = b_2 d_2 \sqrt{2g(d_1 - d_2)}$$

Il faut donc mesurer simultanément la profondeur d'eau à l'amont et dans le col de l'appareil.

2) Ecoulement dénoyé

Le régime critique apparait dans le col de l'appareil. En



considérant le dispositif horizontal et rectangulaire.

Soient:

- d_1, V_1, b_1 les hauteurs d'eau, vitesse et largeur à l'amont
- d_2, V_2, b_2 les mêmes éléments dans le col - ces éléments sont aussi les éléments critiques.

Nous avons:

$$E_1 = d_1 + \frac{V_1^2}{2g} \quad \left(\text{on négligera le terme } \frac{V_1^2}{2g} \right)$$

$$E_2 = E_c = d_c + \frac{V_c^2}{2g}$$

Négligeons la perte de charge entre sections 1 et 2, il vient:

$$E_1 = d_1 = E_2 = E_c = d_c + \frac{V_c^2}{2g}$$

Avec $E_c = 3/2 d_c$

Il vient: $d_1 = 3/2 d_c = 3/2 d_2$

et $d_2 = 2/3 d_1$



Portons d_2 dans la relation $Q = b_2 d_2 \sqrt{2g(d_1 - d_2)}$

Il vient:

$$Q = b_2 \times 2/3 d_1 \sqrt{2g \times 1/3 d_1}$$

ou $Q = 0,385 b_2 \sqrt{2g} (d_1)^{3/2}$

Pour tenir compte des approximations faites on multipliera par un coefficient K . D'où:

$$Q = 0.385 K b_2 \sqrt{2g} d_1^{3/2}$$

Parshall a donné la formule suivante, ainsi que les dimensions pour le dispositif:

$$Q = 372 b_2 d_1^x \times 3,28^x$$

Q = débit en litres/seconde

b_2 = largeur du col

d_1 = profondeur d'eau à l'amont

x = exposant fonction de b_2 donné dans le tableau 4

b_2						
m	0.2	0.6	0.8	1	2	2.6
x	1.506	1.548	1.560	1.569	1.598	1.609

Tableau 4 Valeurs de l'exposant de la formule du débit dans un Parshall.



La largeur au col b_2 est généralement comprise entre $\frac{b_1}{3}$ et $\frac{b_1}{2}$. La hauteur d_1 est mesurée aux $\frac{2}{3}$ de la distance entre le seuil d'entrée du convergent et l'entrée du col; la prise de pression doit être placée au niveau du radier.

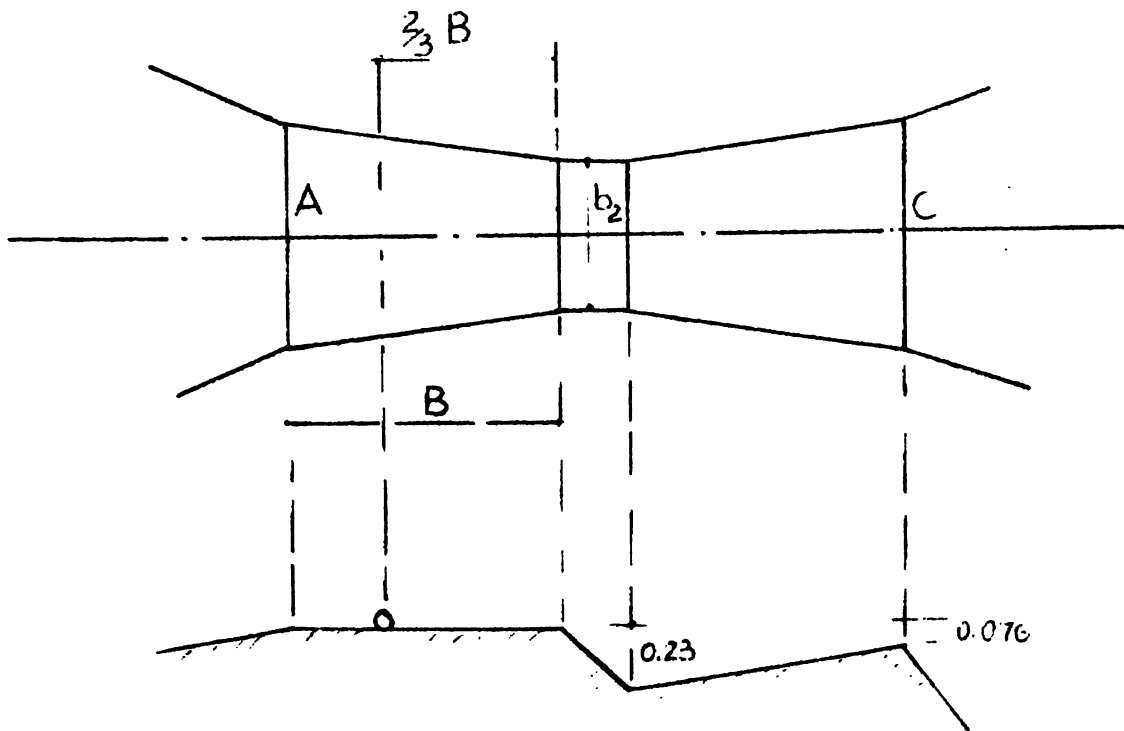


Fig. 36 Schéma du jaugeur Parshall

Les rapports entre les dimensions principales du dispositif préconisé par PARSHALL sont les suivants:

$$A = 1,196 b_2 + 0,479$$

$$B = 0,49 b_2 + 1,194$$

$$C = b_2 + 0,305$$

Les dimensions sont en mètres



d) Piles de Ponts

L'introduction de Piles de Ponts dans un cours d'eau provoque des perturbations dûes au retrécissement du lit qu'introduisent les piles du pont

En général, le cours d'eau qui doit recevoir les piles de ponts sont à pente très faible $I < I_c$. Nous supposons que la profondeur d'eau dans le cours est supérieure à la profondeur critique à l'amont des piles. L'introduction des piles va donner naissance, entre deux piles consécutives, à une section contractée, à l'aval de laquelle on peut avoir un écoulement critique ou un écoulement fluvial, c'est à dire un écoulement dénoyé ou un écoulement noyé.

Partons du cas du régime dénoyé, dans ce cas la perturbation se fait entre les piles et à l'aval; l'écoulement est critique en aval de la section contractée, avec la hauteur critique d_c au droit de cette section. Le niveau rejoindra le niveau normal par un ressaut qui prendra place de plus en plus vers l'amont que le niveau normal à l'aval des piles est de plus en plus haut.

A partir d'une certaine hauteur du niveau normal aval la section critique disparaît et l'écoulement est complètement noyé, le régime est totalement fluvial et la perturbation se porte vers l'amont. Au droit de la section contractée il se produit un creux dans le profil de la surface de l'eau et une augmentation de vitesse dans le plan du creux. On observe alors à l'amont des piles une augmentation de la profondeur d'eau d'une certaine valeur que nous désignons par:

$$Y = d_1 - d_2$$

d_1 = Nouvelle profondeur d'eau avec l'introduction des piles

d_2 = Profondeur d'eau du cours d'eau avant l'introduction des piles



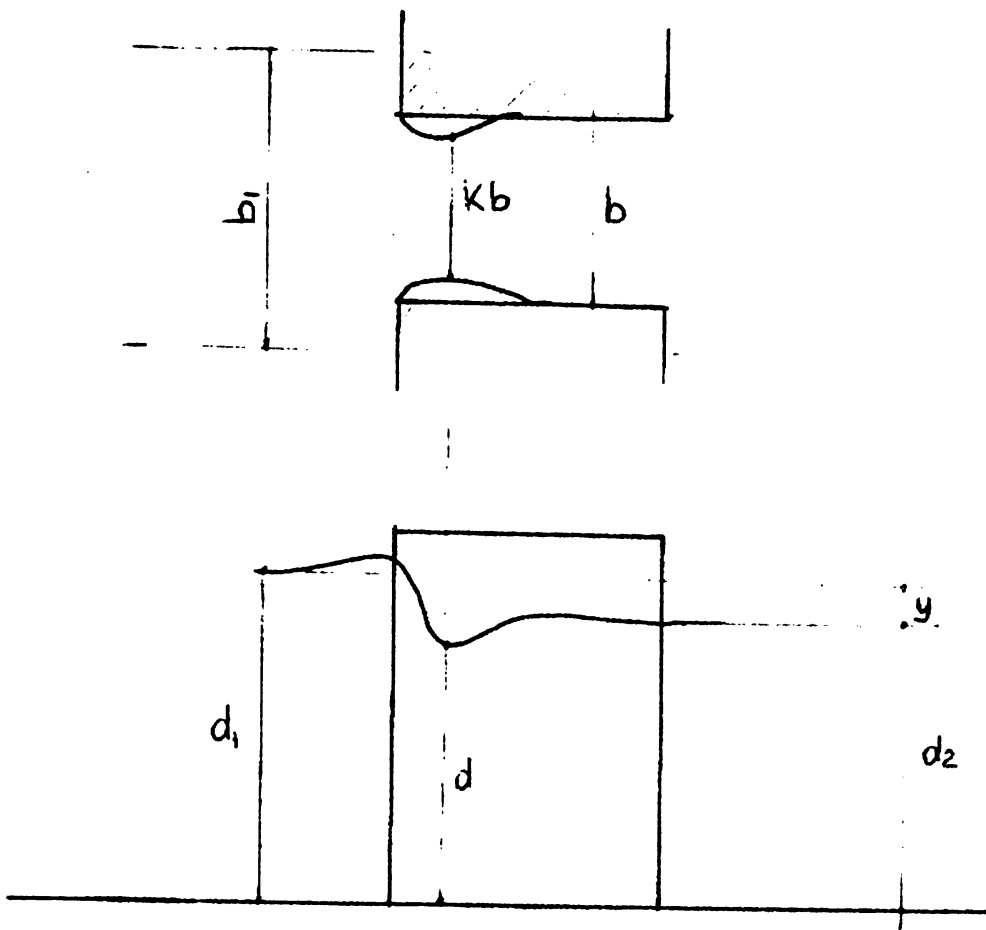


Fig. 37 Effet des piles de ponts sur l'écoulement.

*



Plusieurs expressions sont proposées pour la détermination de Y
 Nous retenons celle de Eytelwein:

$$Y = \frac{V_2^2}{2g} \left(\left(\frac{b_1}{kb} \right)^2 - \left(\frac{d_2}{d_2 + y} \right)^2 \right)$$

y = Remous d'exhaussement

V_2 = Vitesse dans la section normale avant l'introduction des piles

b_1 = Largeur en amont des piles

k = Coefficient de contraction de la largeur b

d_2 = Profondeur normale à l'aval des piles où l'écoulement est redevenu normal

Pour simplifier, on considère les hypothèses suivantes:

telle: y négligeable devant d_2 , et

$$\frac{d_2}{d_2 + y} = 1$$

Après transformation et introduction d'un nouveau coefficient de contraction k_E qui tient compte des hypothèses on arrive à:

$$y = \frac{V_2^2}{gk_E} \left(\frac{b_1}{b} - k_E \right)$$

Eytelwein donne les valeurs de k_E

... ..

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \left(\frac{dy}{dx}\right) = \dots$$

... ..

.

.

... ..

... ..

... ..

... ..

.

$$k_E = 0.95 \text{ Piles avec avant becs aigus}$$

$$k_E = 0.85 \text{ Piles sans avant becs}$$

Disons enfin que les valeurs trouvées sont des valeurs approchées.
L'allemand Rehbock a proposé la formule:

$$y = k_R - \sigma(k_R - 1) (0.4\sigma + 9\sigma^4) \left(1 + \frac{v_2^2}{gd_2}\right) \frac{v_2^2}{2g}$$

Avec: k_R = Coefficient de Rehbock suivant la forme des piles

$$\sigma = \frac{b_1 - b}{b_1} \text{ dans le cas d'une section rectangulaire}$$

$$\sigma = \frac{S_1 - S}{S_1} \text{ dans le cas d'une section de forme quelconque}$$

S_1 = Section mouillée totale sans remous

S = Section mouillée retrécie sans remous

e) Déversoirs

Le déversoir est un orifice incomplèt ou encore tout ouvrage par dessus lequel s'effectue un écoulement avec formation à l'aval d'une veine libre.

Le déversoir peut être à mince paroi ou à paroi épaisse: la



nappe déversante peut être libre lorsque l'air peut circuler librement en dessous ou déprimée, adhérente dans le cas contraire.

Déversoir rectangulaire à mince parois

C'est le type de déversoir le plus étudié. Il peut être sans contraction latérale lorsque le déversoir à même largeur que le canal ou avec contraction latérale lorsque la largeur du déversoir est inférieure à celle du canal.

Considérons un déversoir à mince paroi en fonctionnement. A l'approche du déversoir la surface libre de l'eau s'abaisse. Prenons une tranche d'eau d'épaisseur $d(h)$ dans le plan vertical du déversoir.

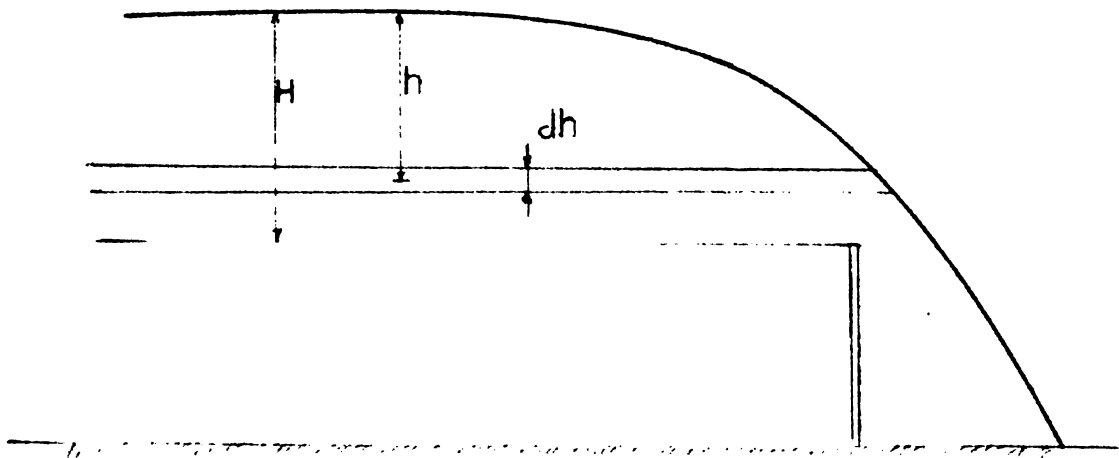


Fig. 38 Schéma de l'écoulement sur un déversoir.

Soit H la hauteur d'eau au-dessus du déversoir, mesurée bien en amont, h est appelée la charge :

Soit V la vitesse dans la tranche d'eau dans le plan vertical du déversoir et supposons que la vitesse bien à l'amont soit nulle. Le théorème de Bernoulli entre le point amont et le point dans le plan du déversoir donne :

$$V = \sqrt{2gh}$$

et le débit de la tranche dh

$$\text{où: } dQ = mL \sqrt{2gh} \, dh$$

L = Largeur du déversoir

m = Coefficient tenant compte des contractions de la nappe et de la vitesse d'approximation.

$$Q = \int_0^H mL \sqrt{2gh} \, dh$$

$$Q = \frac{2}{3} mL \sqrt{2g} H$$

$$Q = \mu LH \sqrt{2g} H$$

La valeur de μ est déterminée suivant le cas, on a :

$$\mu = 0.43$$

Déversoir rectangulaire à mince paroi sans contraction latérale

$$\mu = 0.40 \text{ avec contraction latérale}$$



Quelques formules de déversoirDéversoir Triangulaire

Pour les faibles débits le déversoir triangulaire donne de meilleurs résultats que le déversoir rectangulaire

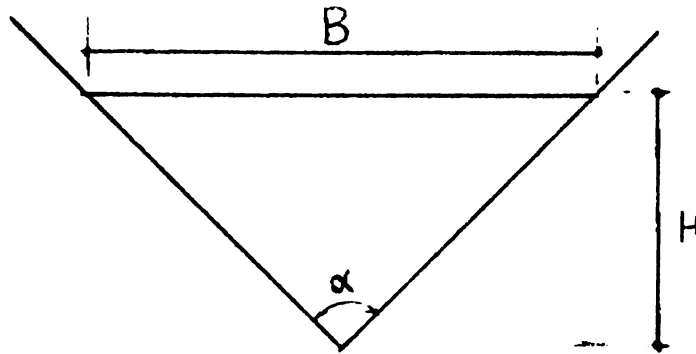


Fig. 39 Section transversale d'un déversoir triangulaire

$$Q = 8/15 \mu_1 H^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{2gH}$$

où:

Q = Débit du déversoir

H = Charge au-dessus du sommet

α = L'angle du déversoir

μ_1 = Coefficient variant avec le rapport $\frac{B}{H}$

$\mu_1 = 0.59$ pour $\frac{B}{H} = 2$

$\mu_1 = 0.62$ pour $\frac{B}{H} = 4$



Déversoir trapézoïdal CIPOLLETTI

C'est un déversoir à forme de trapèze isocèle, la petite base en bas; les côtés latéraux ont des pentes de 1/4. Ceci a pour effet de compenser les contractions latérales qu'introduirait le déversoir. Sa formule est:

$$Q = 1.86 \quad bh^{3/2}$$

où:

$$Q = \text{Débit en m}^3/\text{s}$$

$$b = \text{Largeur de petite base}$$

$$h = \text{Hauteur d'eau en mètres}$$

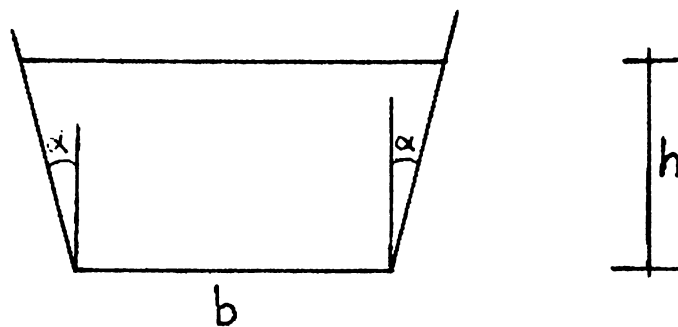


Fig. 40 Section transversale d'un déversoir trapézoïdal Cipolletti.

.....

.....

Déversoir à seuil épais

A l'approche du seuil déversoir la nappe s'abaisse, et sur le seuil l'écoulement se fait à une hauteur quasi constante avec filets parallèles.

Si H est la charge en amont et h la hauteur de la nappe sur le seuil - le théorème de Bernouilli nous donne pour un filet à la surface:

$$H = h + \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{2g(H-h)}$$

Le débit sera pour une largeur L

$$Q = L.h \sqrt{2g(H-h)}$$

Reprenons l'hypothèse de Bellanger qui veut que pour ce genre de déversoir le débit qui se produit pour une charge donnée est le plus grand possible.

$$Q \text{ est maximum pour } \frac{dQ}{dh} = 0$$

$$\frac{dQ}{dh} = L \sqrt{2g(H-h)} - \frac{2g Lh}{2 \sqrt{2g(H-h)}} = 0$$

$$h = \frac{2}{3} H$$

C'est la valeur de la profondeur critique. L'écoulement est donc critique sur le seuil.



La valeur de Q est donc: en portant la valeur de h

$$Q = 0.385 LH \sqrt{2gH}$$

Déversoir à seuil normal

C'est un déversoir à seuil épais dont le profil est tracé de façon à ce que la répartition des pressions soit aussi régulière que possible. Cette pression doit être toujours égale ou supérieure à la pression atmosphérique sur tout l'ouvrage. Une dépression risque de causer des décollements de la nappe et favoriser le phénomène de la cavitation. La cavitation donne naissance à des poches de vapeur qui en se résolvant s'écrasent brusquement et brutalement donnant naissance à des coups de bélier qui peuvent aller jusqu'à mettre en danger la constitution et même la stabilité:

Pour combattre tous ces méfaits on tend à donner au profil du déversoir la forme inférieure de la nappe déversante libre en mince paroi.

Pour le tracer de ce profil. Scimeni a proposé l'équation suivante:

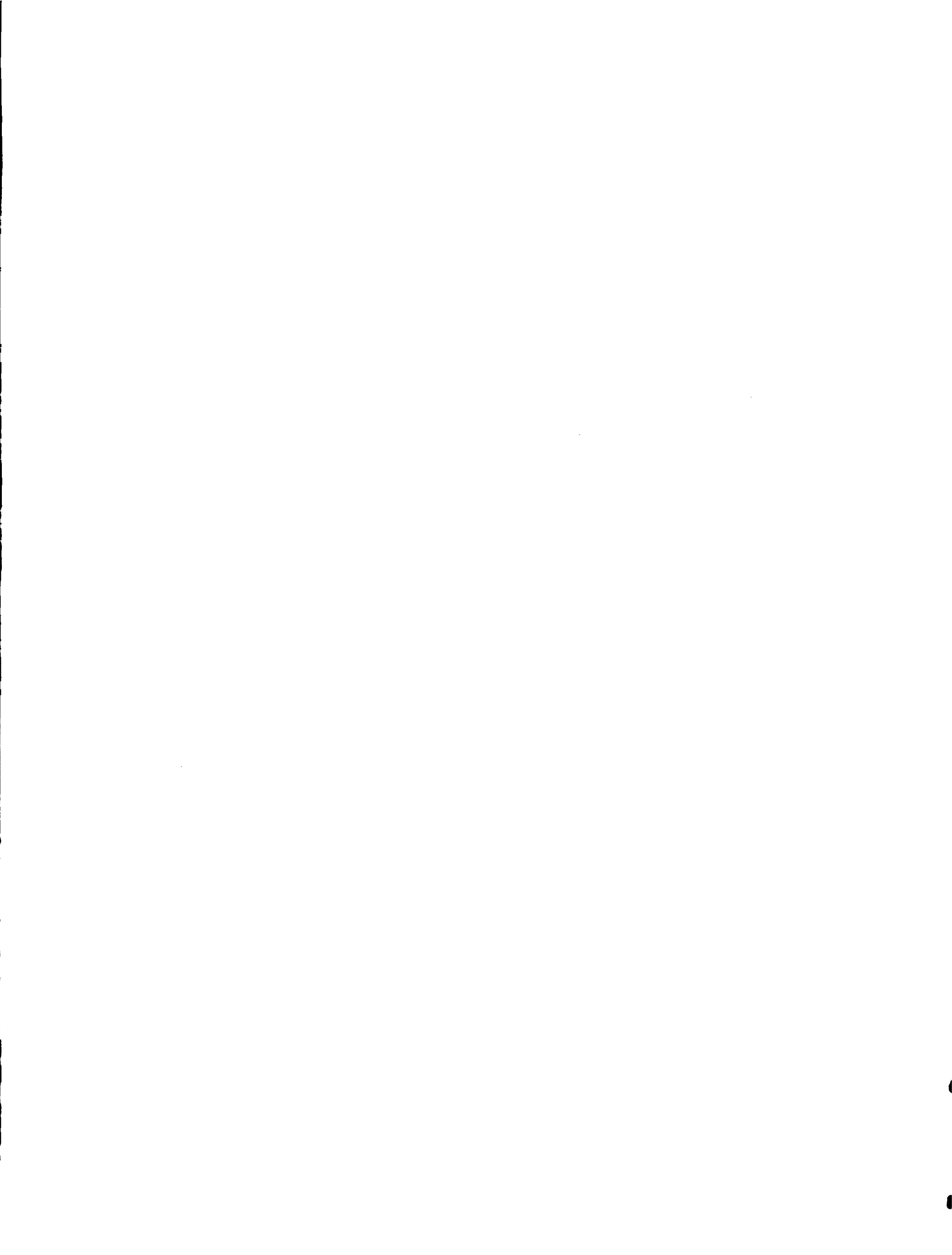
$$\frac{Y}{H} = 0.50 \left(\frac{x}{H}\right)^{1.85}$$

Creager a préconisé:

$$\frac{Y}{H} = 0.47 \left(\frac{x}{H}\right)^{1.80}$$

Le coefficient de débit μ dans l'équation:

$$Q = \mu LH \sqrt{2gH}$$



est le suivant:

$$\mu = 0.49 \text{ à } 0.45 \text{ pour le profil Craeger}$$

Pour une charge $H' \neq H$ le coefficient est:

$$\mu' = \mu \left(\frac{H'}{H} \right)^{0.17}$$

x et y sont les coordonnées tel que définies par la figure ci-après:

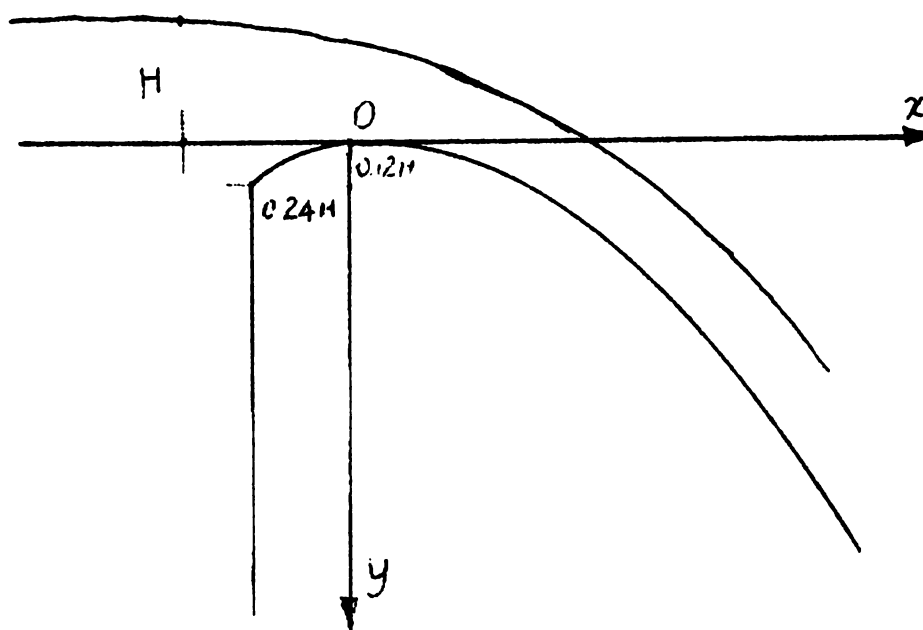


Fig. 42 Déversoir à seuil normal

Des tables sont établies qui permettent de tracer le profil de déversoir à seuil normal.

Ce déversoir est utilisé pour l'évacuation de gros débits tels dans les évacuateurs de crûes de grands barrages.



CHAPITRE VII

ELEMENT D'HYDRAULIQUE FLUVIALE

Transport de sédiments

Sauf quelques cours d'eau dont les lits sont creusés dans des roches dures, des conglomérats compacts ou sur des bancs d'argile, les lits des cours d'eau naturels s'établissent très généralement au sein des matériaux alluvionnaires que les courants liquide ont transportés puis déposés par le phénomène de l'érosion. Donc les rivières ne charrient pas seulement de l'eau mais aussi des matériaux solides.

Le mécanisme du transport des matériaux solides incluent deux modes de transport:

- Le charriage dans lequel les matériaux se déplacent le long des parois sans les quitter, en glissant et en roulant.
- La Suspension où les matériaux quittent la paroi et participent à l'écoulement d'ensemble.

1- Le Charriage

Si on observe à travers un canal vitré le mouvement d'un caillou en contact avec la paroi dans un écoulement liquide, on distingue 3 mouvements: un glissement, un roulement et un bond. La vitesse de l'élément observé semblant varier. Nous avons défini le charriage.

La détermination du transport par charriage est basée sur la notion de force tractrice.

Force Tractrice

Considérons un écoulement en régime permanent.

Soit:

I = Pente du fond du canal, égale à la pente de la surface libre de l'eau.

γ = Le poids spécifique de l'eau

R = Rayon hydraulique = d profondeur de l'eau si la largeur du cours d'eau est très grande par rapport à d

La force moyenne exercée sur le fond du lit est donnée par:

$$F = \gamma RI \quad \text{ou}$$

Pour une grande largeur:

$$F = \gamma dI$$

L'équation aux dimensions de F est: $MLT^{-2} - L^{-2}$, c'est une force par unité de surface. C'est en réalité une tension tangentielle.

On appelle Force Tractrice Incipiente F_0 , la force à partir de laquelle les matériaux du fond commencent à se déplacer.

Des expériences ont permis de déterminer cette force tractrice incipiente dans le cas des matériaux sans cohésion. Elle est donnée par:

$$F_0 = \frac{d \sqrt{gRI}}{\nu} \gamma (G - 1)d$$

Où:

R = Rayon hydraulique de la section (m)

I = Pente du lit



γ = Poids spécifique de l'eau (kg/m^3)

G = Gravité spécifique des matériaux du lit

d = Diamètre moyen du grain

η = Accélération de la pesanteur

ν = Viscosité cinématique de l'eau

Pour des particules de diamètres comprises entre 0.4 et 30 mm, l'expérience a montré que l'on a sensiblement:

$$F_o = 0.071 d$$

F_o est exprimé en kg/m^2

d est exprimé en millimètres

Dans les canaux à section trapézoïdale la force tractrice est maximum sur le fond au milieu de la section; les côtés dans le voisinage du fond, entre 2/10 et 3/10 de la profondeur. Pour tenir compte de la pente des berges on introduit le facteur K qui est le rapport de la force tractrice nécessaire pour déplacer le matériau placé sur les berges inclinées à la force tractrice pour déplacer le même matériau placé sur un fond horizontal:

$$K = \cos \phi \sqrt{1 - \frac{\text{tg}^2 \phi}{\text{tg}^2 \Theta}}$$

où:

ϕ = Angle de la berge du canal avec l'horizontale

Θ = Angle de frottement du matériau

Les tableaux et abaques ci-joint aident à faire les calculs.

Transport Débit Solide

Des formules de Transport par charriage du débit solide d'un courant liquide sont établies à la suite d'expériences effectuées dans des canaux artificiels et après essais sur modèle.

Nous présentons la formule de Meyer-Peter-Muller sous sa forme générale:

$$\frac{q_s^{2/3} J}{d \gamma_s^{10/9}} = 9,57 + 0,462 \frac{g_s''^{2/3}}{d \cdot \gamma_s^{7/9}}$$

Dans laquelle:

q_s = Le débit liquide par unité de largeur kg/s/m

J = Pente de la ligne d'énergie

d = Diamètre des grains de dimension d_{35} , c'est à dire du diamètre du tamis qui laisse passer 35% en poids du mélange de grains

γ_s = Poids spécifique du solide en tonnes/m³

γ = Poids spécifique du liquide en tonnes /m³

$\gamma_s'' = \gamma_s - \gamma$

g_s = Le débit solide par unité de largeur kg/s/m

$q_s'' = q_s \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_s}\right)$ = transport spécifique pesé sous l'eau

Il existe une forme simplifiée de la formule qui donne des résultats satisfaisantes si la granulométrie est sensiblement uniforme.

$$\frac{q_s^{2/3} J}{d} = A + \frac{B g_s^{2/3}}{d} \quad \text{avec: } \begin{array}{l} A = 17 \\ B = 0.4 \end{array}$$



2 - Suspension

Dans le transport en suspension, les particules solides participent avec le liquide à l'écoulement général. Ces particules solides qui sont en général plus lourdes que l'eau restent en suspension sous l'action de la turbulence du mouvement.

Pour un grain de poids mg en suspension dans l'eau, avec une vitesse de chute W , il existe une traînée de la chute proportionnelle au carré de la vitesse, et si le mouvement de cette chute est uniforme on a la relation:

$$mg = K W^2$$

Par le jeu des vitesses de chute de la turbulence qui fournit les forces ascensionnelles, on peut arriver à une répartition de la concentration dans les différentes couches de courant. La concentration est le volume, la masse, ou le poids de matériaux contenu dans l'unité de volume d'eau.

Hunter Rouse a proposé une formule permettant de calculer la concentration en un point M du liquide pour un écoulement uniforme.:

$$\frac{C}{C_a} = \frac{\left[1 - \frac{Y}{Y_0} \frac{a}{Y_0} \right]}{\left[\frac{Y}{Y_0} \left(1 - \frac{a}{Y_0} \right) \right]}$$

Avec:

C = Concentration au point M

Y = Hauteur du point M au-dessus du fond

a = Epaisseur de la couche du liquide à partir du fond



où la relation ne s'applique pas

Y_0 = Hauteur d'un point A dont le concentration est C_a

$$Z = \frac{W}{KU_*}$$

Où:

W = Vitesse de chute

U_* = Vitesse de frottement = $\sqrt{\tau/\rho}$

τ = Contrainte tangentielle de frottement sur la paroi

ρ = Masse spécifique du liquide

Rouse à établi un graphique, solution de l'expression ci-dessus

Le laboratoire d'hydraulique SOGREAH en France a conduit des expériences qui ont permis de faire des remarques suivantes:

- Lorsque le diamètre des grains est inférieur à 50 microns, on obtient un mixture homogène qui se comporte comme un liquide de densité égale au poids total des composants par unité de volume.

- Lorsque les diamètres des grains sont compris entre 50 microns et 150 microns (50 d 150), on obtient un mixture hétérogène où le transport en suspension se fait sous l'effet de la turbulence; et les éléments solides ne prennent pas de glissement par rapport au fluide et n'introduisent pas de résistance supplémentaire.

- Lorsque les diamètres des grains sont supérieurs à 2mm, ils circulent moins vite que le liquide et dissipent de l'énergie en chocs contre les parois.



Stabilité des canaux: Force tractrice

τ - kg/m^2 : Force tractrice

γ - kg/m^3 : Poids spécifique du liquide

d - m : Profondeur d'eau

i - (adim.) : Pente du canal

a) Distribution de la force tractrice:

1 - Canal infiniment large

Dans un canal infiniment large, la force tractrice au fond est: $\tau = \gamma di$;

2 - Canal Trapézoïdal

Dans un canal trapézoïdal la distribution de la force tractrice a l'allure indiquée dans la figure

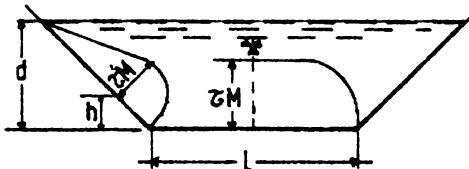


Tableau 43 La force tractrice dans un canal trapézoïdal

Force maximum au fond:

$$\tau_M = K_M \gamma \cdot di$$

Force maximum dans les côtés:

$$\tau'_M = K'_M \gamma di$$



Sur le fond, τ_M se produit au milieu; sur les côtés, τ_M est placée à une distance du fond: $h = K_h d$

m	2/1			3/2			0 (rectangulaire)		
	K_M	K'_M	K_h	K_M	K'_M	K_h	K_M	K'_M	K_h
0*	0	0,650	0,3	0	0,565	0,3	0	0	-
1	0,780	0,730	-	0,780	0,695	-	0,372	0,468	1,0
2	0,890	0,760	0,2	0,890	0,735	0,2	0,686	0,686	1,0
3	0,940	0,760	-	0,940	0,743	-	0,870	0,740	1,0
4	0,970	0,770	0,2	0,970	0,750	0,2	0,936	0,744	1,0
6	0,980	0,770	-	0,980	0,755	-	-	-	-
8	0,990	0,770	0,2	0,990	0,760	0,2	-	-	-

Tableau 5 Valeurs de K_m , K'_m et K_h pour les canaux trapézoïdaux.

3 - Canal triangulaire (voir la figure, pour $L = 0$)

m	2/1	3/2	1/1	2/3	1/2
K'_M	0,650	0,565	0,480	0,375	0,325
K_h	0,3	0,3	0,5	0,7	0,7

Tableau 6 Valeurs de K'_m et K_h pour les canaux triangulaires



(suite) Stabilité des canaux: force tractrice

b) Force tractrice critique:

La force tractrice critique, pour un matériau déterminé, est la force tractrice à partir de laquelle le matériau commence à se déplacer.

Les valeurs ci-dessous concernent des canaux rectilignes. Pour des canaux avec peu de courbes (terrain faiblement accidenté) on doit prendre 0,90 des valeurs indiquées: pour une quantité moyenne de courbes (terrain moyennement accidenté) on prend 0,75; pour des canaux avec beaucoup de courbes (terrain très accidenté) on prend 0,60.

1 - Matériaux non-cohérents gros

Au fond on prend comme valeur pour le projet $(\text{kg/m}^2) = 0,8 d_{75} (\text{cm})$
 (d_{75} est le diamètre auquel correspond, dans la courbe de composition granulométrique, 75% en poids, de matériaux de diamètre inférieur).

Sur les côtés on prend $= K$ (K est fonction de l'angle de repos du matériau et de l'angle des côtés avec l'horizontale).



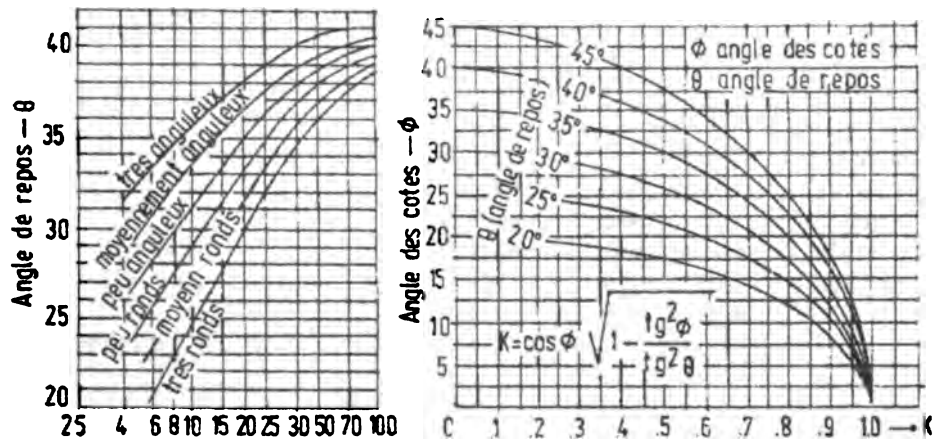
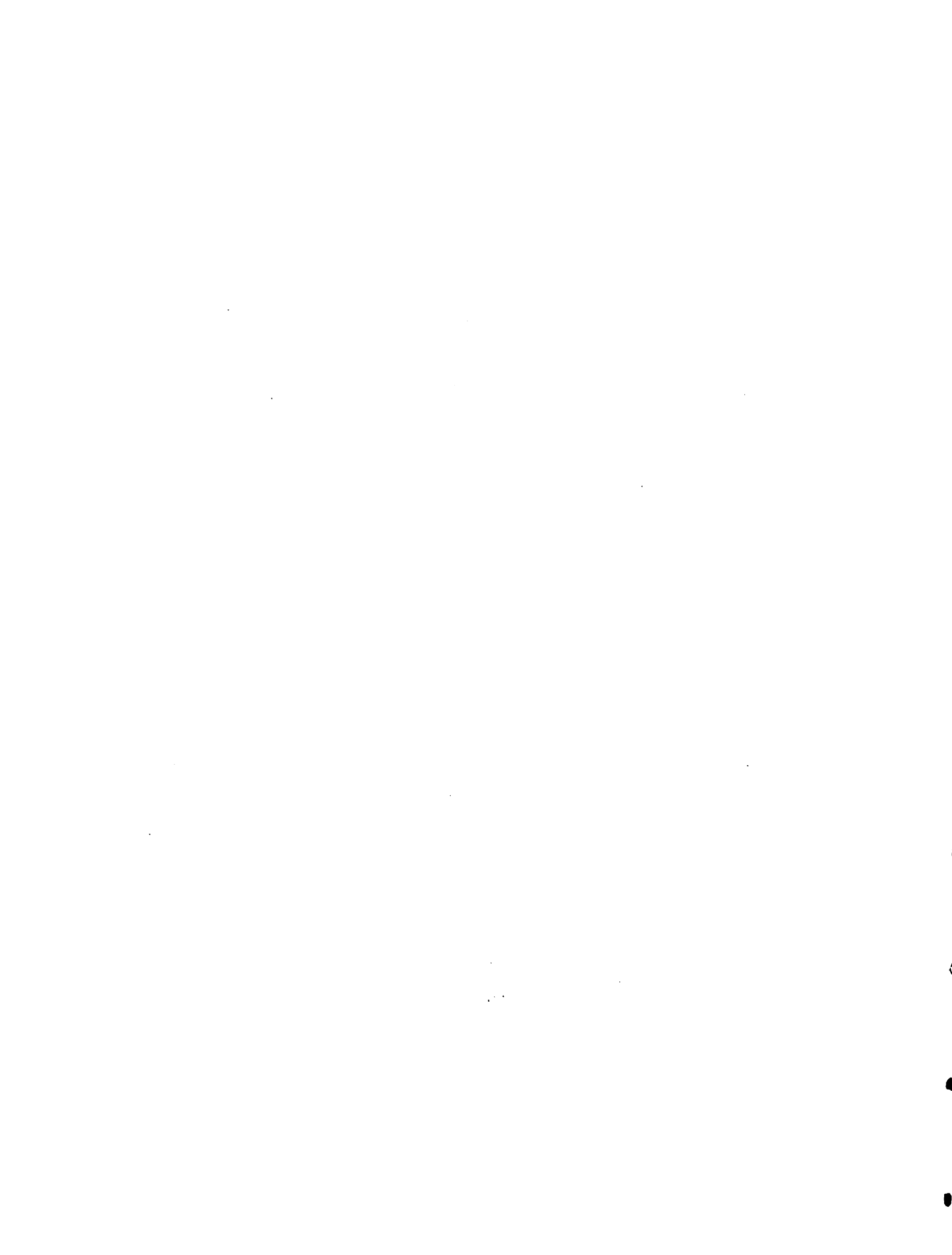


Figure 44 Relation entre le diamètre et l'angle de repos et K et Z.

2 - Matériaux non-cohérents fins: τ_0 en kg/m^2

Diamètre moyen d_{50} en mm	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5.0
Eau claire.....	0,012	0,013	0,015	0,020	0,029	0,068
Eau avec peu de sédiments fins..	0,024	0,025	0,027	0,029	0,039	0,081
Eau avec beaucoup de sédiments fin	0.038	0,038	0,041	0,044	0,054	0,090

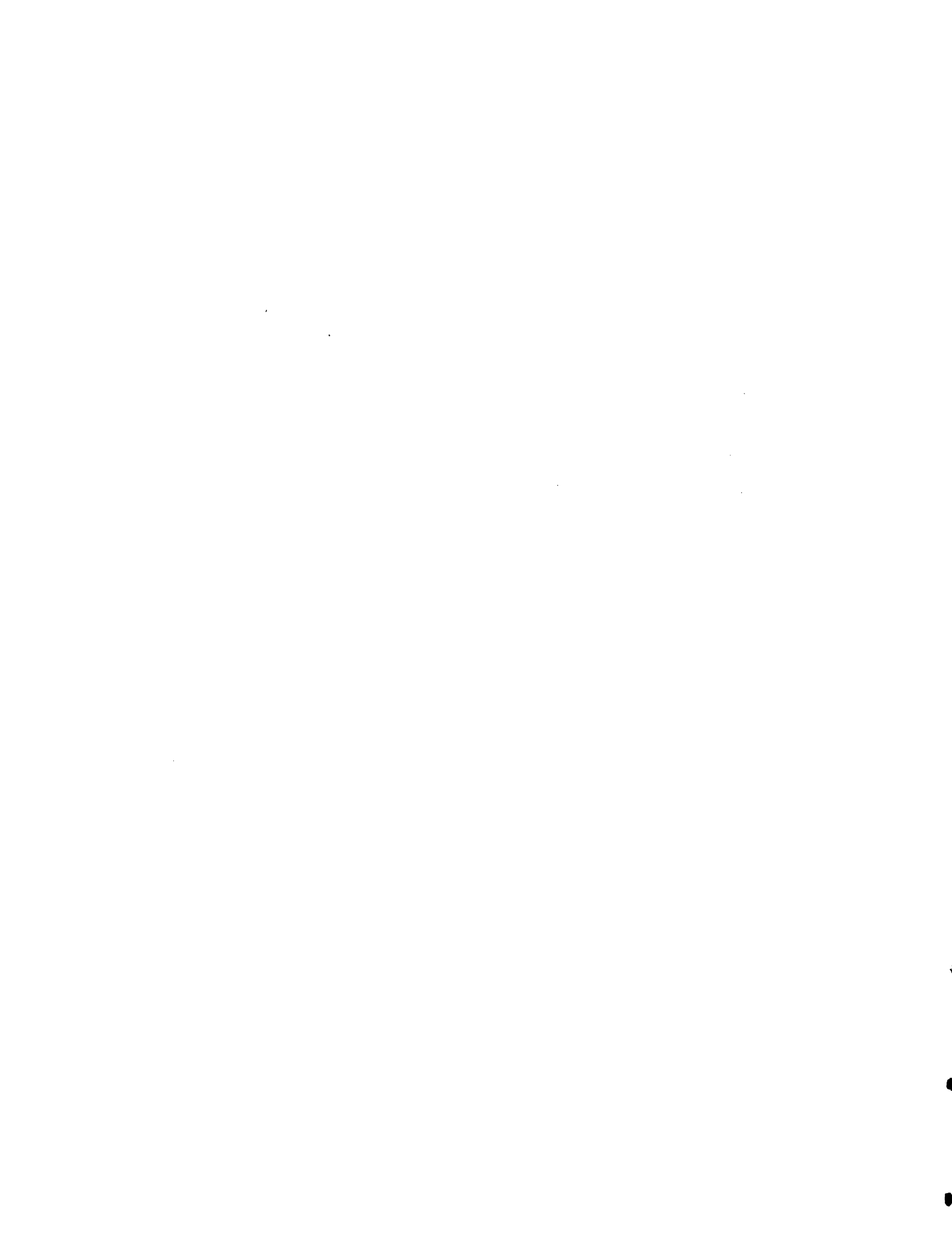
Tableau 7 Valeurs de τ en kg/m^2 pour les matériaux non cohérents fins.



3- Matériaux non-cohérents fins: τ en kg/m^2

Nature du lit	Très peu Compacté avec un indice de vide de 2,0 à 1,2	Peu compacté avec un indice de vide de 1,2 à 0,6	Compacté avec un indice de vide de 0,6 à 0,3	Très compacté avec un indice de vide de 0,3 à 0,2
Matériau cohérent du lit				
Argiles sableuses (pourcentage de sable inférieur à 50%)	0,020	0,077	0,016	0,308
Sols avec beaucoup d'argiles	0,015	0,069	0,149	0,275
Argiles.....	0,012	0,061	0,137	0,259
Argiles très fines.....	0,010	0,047	0,104	0,173

Tableau 8 Valeurs de τ en kg/m^2 pour les matériaux cohérents



CHAPITRE VIII

ELEMENTS D'ANALYSE DIMENSIONNELLE ET DE SIMILITUDE HYDRAULIQUE

Généralités:

L'hydraulique, nous le savons déjà, pour une bonne part se développe et résoud beaucoup de ses problèmes par la voie expérimentale. De nombreux projets, de nos jours, sont étudiés à partir de modèles aux dimensions réduites qui permettent de conduire des études que l'on ne saurait effectuer sur l'objet, le site grandeur nature. L'analyse dimensionnelle et la similitude hydraulique sont deux instruments précieux qui aident dans ces genres de solutions apportées aux problèmes posés.

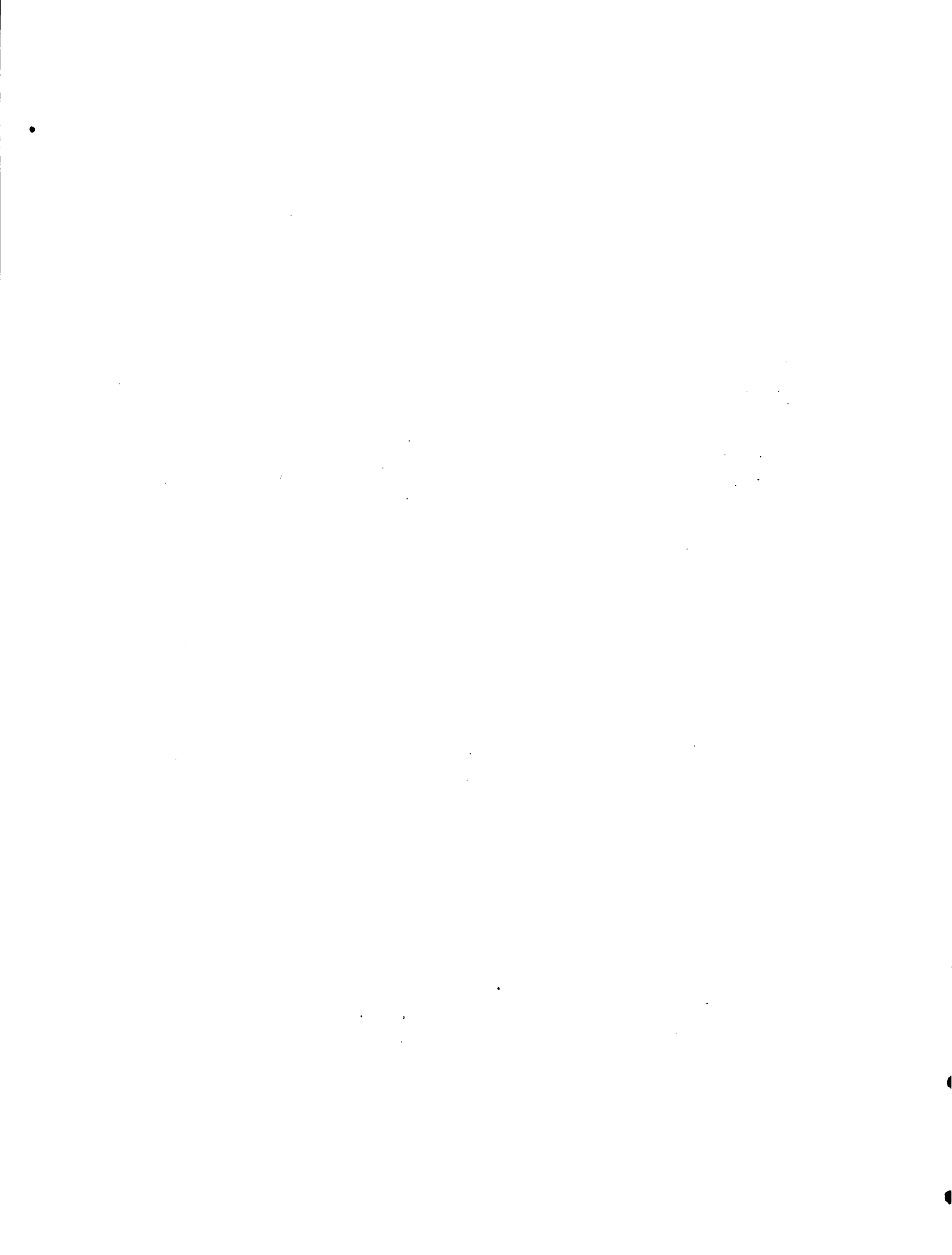
1- Analyse Dimensionnelle

Une loi physique, dans son expression mathématique, doit être indépendante du système d'unités choisi, en d'autres termes, elle doit être homogène.

Une loi physique est concrétisée par une relation entre un certain nombre de paramètres. Et ces paramètres ou grandeurs physiques peuvent s'exprimer en fonction de quatre grandeurs fondamentales:

- La masse M
- La longueur L
- Le temps T
- La température

On appelle équation aux dimensions d'une grandeur physique, l'expression de cette grandeur en fonction des grandeurs fondamentales plus haut citées.



Ainsi une vitesse qui est une longueur divisée par un temps a pour équation au dimension:

$$\frac{L}{T} \text{ ou } LT^{-1}$$

Une accélération est une vitesse divisée par un temps:

$$\text{Accélération} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$

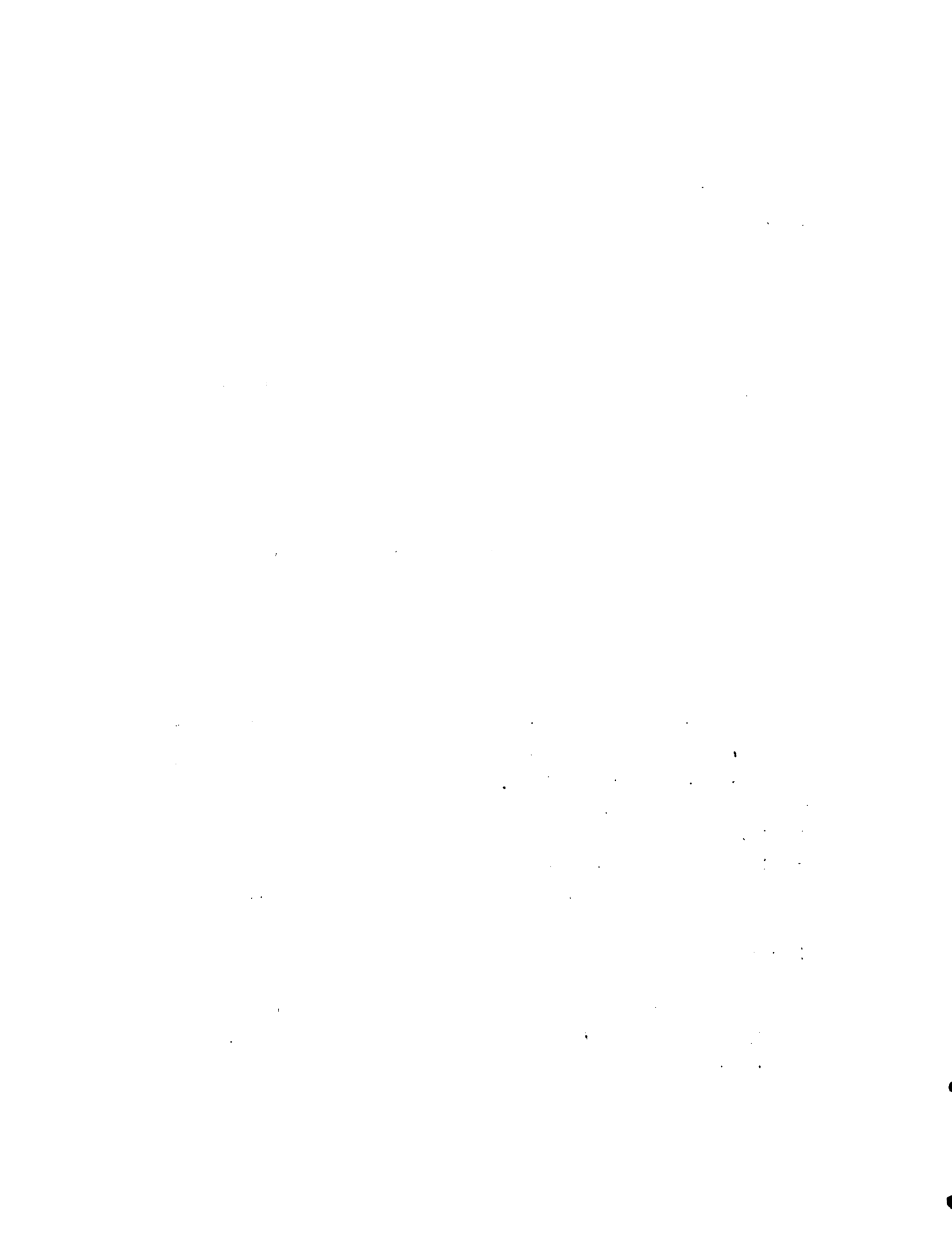
Une force est le produit d'une masse par une accélération

$$\text{Force} = M \times LT^{-2} = MLT^{-2}$$

L'analyse dimensionnelle est cette opération mathématique qui traite des dimensions des grandeurs physiques ou quantités en fonction des grandeurs fondamentales. Elle permet de trouver l'expression mathématique de la relation qui relie les diverses grandeurs physiques qui entrent dans un phénomène physique. Elle permet aussi de définir la forme la plus simple que peut revêtir une expression mathématique reliant les divers paramètres ou grandeurs physiques qui entrent dans un phénomène physique.

Théorème de Buckingham ou théorème des Π

Soient n le nombre de grandeurs physiques entrant dans un phénomène étudié, et r le nombre de grandeurs fondamentales entrant dans la définition de ces n grandeurs physiques, toute relation reliant ces n



grandeurs physiques, fonctions des r grandeurs fondamentales peut être ramenée à une relation entre $(n - r)$ nombres sans dimensions qui constituent la série complète des nombres sans dimensions que l'on peut former avec les n grandeurs physiques considérées. Ces $(n - r)$ nombres sans dimensions sont appelés des termes π d'où le nom de théorème de π

Ainsi pour un phénomène dépendant de 7 grandeurs physiques, fonction de 3 grandeurs fondamentales, le nombre de produits sans dimensions que l'on peut former est: $n - r = 7 - 3 = 4$.

Et au lieu d'avoir la relation entre 7 facteurs, on aura une relation entre 4 facteurs.

A la vérité le théorème de Buckingham est une simplification d'une méthode plus générale.

La méthode générale consiste à écrire le tableau des dimensions des diverses grandeurs n et à déterminer le rang r du tableau matriciel ainsi formé, ce qui donne le nombre $(n - r)$ des produits sans dimensions. Mais en général, on estime que le théorème des π donne des résultats assez corrects.

Produits sans dimensions en hydraulique

En hydraulique les diverses grandeurs qui interviennent dans les phénomènes sont en nombre limité et les produits sans dimensions que l'on peut former à partir d'elles sont les produits simples, dont quelques uns portent le nom de celui-ci qui les a mis en évidence.

Ce sont:

$$- \text{Rapport de dimensions linéaires: } \frac{D_1}{D_2} ; \frac{h_1}{h_2}$$



- Rapport de pressions: $\frac{p_1}{p_2}$; $\frac{\rho v^2}{2}$

$\frac{\rho v^2}{2}$ = pression dynamique, Nombre d'Euler

- Rapport de charge: $\frac{H_1}{H_2}$; $\frac{v^2}{gH}$ (rapport de force d'inertie

aux forces de gravité. C'est le nombre de Froude $F = \frac{v}{\sqrt{gH}}$)

- Nombre de Reynolds: $\frac{VD}{\nu}$ Rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité

- Nombre de Mach: M qui est le rapport d'une vitesse à la vitesse du son dans le fluide $M = \frac{v}{c}$

- Nombre de Weber $\frac{\rho v^2 D}{\sigma}$ Rapport des forces d'inertie à force de tension superficielle.

.....

.....

2- Similitude Hydraulique

En Hydraulique, l'expérimentation joue un rôle de premier plan. Mais l'expérimentation en vraie grandeur est souvent délicate, difficile et onéreuse. Très souvent, on est obligé de passer au modèle réduit qui est d'un prix plus faible, facilite les mesures. Mais comment passer du modèle, au prototype, c'est ce que les lois de la similitude mécanique nous permettent de faire. Disons que la similitude mécanique suppose la réalisation de la similitude géométrique, cinématique et dynamique.

2.1 Similitude Géométrique

Il y a similitude géométrique entre un prototype (P) et un modèle (m) si le modèle est géométriquement semblable au prototype, c'est à dire si tous les éléments linéaires homologues du modèle et du prototype sont dans un même rapport L_r qui est l'échelle linéaire du modèle.

On a donc:

$$L_r = \frac{L_m}{L_p}$$

2.2 Similitude Cinématique

La similitude cinématique existe entre le modèle et le prototype si d'une part la similitude géométrique existe et si d'autre part les vitesses et les accélérations dans le modèle et le prototype sont dans les points homologues dans un rapport constant.

Soient:

$$L_r = \frac{L_m}{L_p} \quad \text{l'échelle du modèle}$$

$$T_r = \frac{t_m}{t_p} \quad \text{l'échelle du temps}$$



La vitesse dans le prototype est: $V_p = \frac{L_p}{t_p}$

La vitesse dans le modèle est: $V_m = \frac{L_m}{t_m}$

Le rapport $\frac{V_m}{V_p}$ donne:

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{L_m}{t_m} : \frac{L_p}{t_p} = \frac{L_m}{t_m} \times \frac{t_p}{L_p}$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{L_m}{L_p} \times \frac{t_p}{t_m} = L_r / T_r$$

$$\frac{V_m}{V_p} = V_r = \frac{L_r}{T_r} = L_r T_r^{-1}$$

Le rapport des accélérations: $\frac{a_m}{a_p}$

$$\frac{a_m}{a_p} = \frac{L_m}{t_m^2} : \frac{L_p}{t_p^2} = \frac{L_m}{L_p} \times \left(\frac{t_p}{t_m}\right)^2$$

$$\frac{a_m}{a_p} = a_r = L_r \times \left(\frac{1}{T_r}\right)^2 = \frac{L_r}{T_r^2} \quad \text{ou} \quad L_r T_r^{-2}$$

On remarque que L_r étant fixé, en fixant T_r , on fixe au même temps l'échelle des vitesses et des accélérations V_r et a_r .

2.3 Similitude Dynamique

La similitude dynamique existe entre un modèle et un prototype géométriquement et cinématiquement semblables si toutes les forces agissant en des points homologues du modèle et du prototype sont dans un même rapport constant.

Nous allons considérer les principales forces qui interviennent en hydraulique. Ces forces sont: d'inertie, de turbulence, de pesanteur, de viscosité, de capillarité.

Force d'Inertie

La force d'inertie sur une particule de masse m et de vitesse V est donnée par:

$$F = m \frac{V^2}{r}$$

où:

r = Rayon de courbure de la trajectoire

On aura pour le prototype et le modèle

On aura pour le prototype et le modèle

$$F_p = m_p \frac{v_p^2}{r_p}$$

$$F_m = m_m \frac{v_m^2}{r_m}$$

$$\frac{F_m}{F_p} = m \frac{v_m^2}{r_m} : \frac{v_p^2}{r_p} m_p$$

$$\frac{F_m}{F_p} = F_r = \frac{m_m}{m_p} \times \frac{r_p}{r_m} \times \left(\frac{v_m}{v_p}\right)^2$$

$$\frac{m_2}{m_1} = M_r \quad (\text{rapport des masses})$$

$$\frac{r_p}{r_m} = \frac{1}{L_r} \quad (\text{rapport des longueurs})$$

$$\frac{v_m}{v_p} = V_r \quad (\text{rapport des vitesses})$$



D'où:

$$F_r = \frac{M_r v_r^2}{L_r}$$

On peut écrire pour M_r

$$m = \rho L^3$$

$$M_r = \rho_r L_r^3 \text{ ce qui donne:}$$

$$F_{ir} = \frac{\rho_r L_r^3 v_r^2}{L_r} = \rho_r L_r^2 v_r^2$$

ou encore:

$$F_{ir} = \rho_r L_r^4 T_r^{-2}$$

Force de Turbulence

La force de turbulence, résultant de la théorie de longueur de mélange de Prandth et de Von Karman peut s'écrire:

$$F_t = \rho u' v' S$$

u' et v' = composante longitudinale et transversale de la fluctuation de la vitesse instantannée

S = Section

On aura alors:

$$F_{Tr} = r v_r^2 L_r^2$$

Donc: $F_{Tr} = F_{ir}$

Les forces d'inertie et de turbulence ont le même rapport de similitude. On peut dire que ces deux forces sont de même nature.

Force de Pésanteur

La force de pésanteur sur la particule de masse m est:

$$F = mg$$

On aura pour rapport de similitude

$$F_{pr} = M_r g_r$$

$$M_r = \rho_r L_r^3$$

$$F_{pr} = \rho_r L_r^3 g_r$$

Forces de Viscosité

La force de viscosité s'écrit:

$$F = \mu S \frac{V}{n}$$

On a pour rapport de similitude:

$$F_{vr} = \mu_r L_r^2 V_r L_r^{-1}$$

$$F_{vr} = \mu_r L_r V_r$$

Forces de Capillarité

La force de capillarité est donnée par:

$$F = A L$$

A = Constante capillaire du liquide

L = Longueur intéressée sur la surface libre

Le rapport de similitude sera:

$$F_{gr} = A_r L_r$$

A_r = Rapport des constantes capillaire des liquides

Lois de la Similitude Dynamique

En général, dans le phénomène d'écoulement de fluide, les forces n'interviennent pas toutes avec la même intensité et avec la même importance. Suivant le problème, certaines prennent prépondérance sur les autres et on peut ne tenir compte que de ces forces en négligeant les autres. De ce point de vue, il se présente deux grands groupes de phénomènes d'écoulement:

- Ceux dont les forces de pesanteur, de turbulence et d'inertie sont prépondérantes, les forces de capillarité et de viscosité sont négligeables.
- Ceux dont les forces de viscosité et d'inertie et de turbulence sont prépondérantes; les forces de capillarité et de pesanteur sont négligeables.

1) Les forces de Pesanteur et d'Inertie sont prépondérantes

Nous savons que pour qu'il y ait similitude dynamique il faut que les forces qui agissent en des points homologues le fassent suivant un rapport fixe et déterminé, le même pour toutes les forces.

On doit donc avoir:

$$F_{ir} = F_{tr} = F_{pr}$$

ou avec $F_{ir} = F_{tr}$ que nous avons:

$$F_{ir} = F_{pr}$$

$$\rho_r L_r^4 T_r^2 = \rho_r L_r^3 g_r$$



D'où:

$$L_r T_r^{-2} = g_r$$

Cette relation traduit la condition de Froude-Reech.

Si g est le même pour le modèle que pour le prototype, ce qui est en général dans la réalité: donc

$$g_r = 1 \quad \text{et il vient:}$$

$$L_r T_r^{-2} = 1 \quad \text{ou} \quad L_r = T_r^2$$

Ou encore:

$$T_r = L_r^{1/2}$$

L'échelle des temps est égale à la racine carrée de l'échelle des longueurs.

Considérant:

$$L_r T_r^{-2} = 1$$

ou:

$$\frac{L_r}{T_r^2} = 1 \quad \text{que l'on peut écrire:}$$

$$\frac{L_r^2}{T_r} = L_r \quad \text{ou} \quad V_r^2 = L_r$$

D'où:

$$V_r = L_r^{1/2}$$

On a aussi l'échelle des vitesses est égale à la racine carrée de l'échelle des longueurs.

C'est aussi la condition de Froude-Reech . Considérons le nombre de Froude:

$$F = \frac{V^2}{2g}$$

Ecrivons le rapport modèle - prototype. on a:

$$\frac{V_r^2}{g_r} = \frac{L_r^2}{T_r^2 L_r g_r} = \frac{L_r}{T_r^2 g_r}$$

De la condition de Froude, plus haut:

$$L_r T_r^{-2} = g_r \quad \text{on tire} \quad L_r = T_r^2 g_r$$

D'où en portant dans le rapport, il vient

$$\frac{L_r}{L_r} = 1$$

Nous concluons que le nombre de Froude est le même pour le modèle que pour le prototype.



2- Les forces d'Inertie et de Viscosité et de turbulence sont prépondérantes

On a toujours:

$$F_{ir} = F_{tr}$$

La condition donne:

$$F_{ir} = F_{vr}$$

$$\rho_r L_r^4 T_r^{-2} = \mu_r L_r^2 T_r^{-1}$$

Ou

$$r L_r T_r^{-1} = \mu_r$$

Ou

$$\frac{\mu_r}{r} = L_r \cdot \frac{L_r}{T_r}$$

$$\nu_r = L_r V_r$$

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{L_m}{L_p} \times \frac{V_m}{V_p}$$

ou

$$\frac{L_m V_m}{\nu_m} = \frac{L_1 V_1}{\nu_p} = R \text{ (Constante)}$$



Cette similitude revient à dire que le nombre de Reynolds (R) pour les points homologues du modèle et du prototype. C'est la similitude de Reynolds

Incompatibilité des Similitudes de Froude et de Reynolds

La condition de Froude est: $L_r T_r^{-2} = 1$

La condition de Reynolds est: $\nu_r = L_r V_r = L_r^2 T_r^{-1}$

Éliminons T_r entre les 2 relations, il vient:

$$\nu_r = L_r^2 L_r^{-1/2} = L_r^{3/2}$$

Où $\nu_r = L_r^{3/2}$

D'où:

$$\frac{\nu_r}{L_r^{3/2}} = 1$$

Dans la pratique il est très difficile de faire varier ν entre le prototype et le modèle. Cela exigerait l'utilisation de liquide très onéreux. Généralement, on utilise l'eau pour le modèle et le prototype. Donc

$$\nu_r = 1$$

D'où:

$$L_r^{3/2} = 1 \quad \text{et} \quad L_r = 1$$

Cette condition équivaut au modèle identique au prototype. Donc, on peut dire qu'il est pratiquement impossible de réaliser des essais sur modèle réduit satisfaisant simultanément les conditions de Froude et de Reynolds.

CHAPITRE IX

MACHINES HYDRAULIQUES

Généralités

Dans un liquide en mouvement permanent et le long d'un filet liquide pris dans la masse liquide, le théorème de Bernouilli s'écrit:

$$z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} + j = H \text{ constante}$$

H est la charge, c'est l'énergie totale y compris la portion d'énergie perdue par frottement. Le lieu de H est donc une ligne horizontale qui est la ligne de charge. La ligne d'énergie qui exprime la quantité d'énergie disponible en un point se déduit de la ligne de charge en retranchant de H sur la verticale du point la valeur j, perte de charge totale entre le début de l'écoulement et le point considéré.

Maintenant entre deux points voisins de l'écoulement, nous introduisons une machine capable de faire varier l'énergie de la veine qui la traverse, soit en y extrayant ou en y ajoutant de l'énergie. La ligne de charge et la ligne d'énergie présenteront alors une variation brusque correspondant à la quantité d'énergie extraite ou introduite par la machine.

Cette machine qui modifie l'énergie de la veine liquide qui la traverse est une machine hydraulique.

Si la machine hydraulique ajoute de l'énergie à la veine liquide, elle est dite motrice ou élévatoire; si elle extrait de l'énergie, elle est dite réceptrice.

Une pompe est une machine élévatoire; une turbine est une machine réceptrice.

[Faint, illegible text covering the majority of the page, possibly bleed-through from the reverse side.]

Machines élévatoiresClassification

Considérons l'expression de l'Energie disponible

$$E = z + \frac{p}{\gamma w} + \frac{v^2}{2g}$$

On peut arriver à faire varier E en agissant sur l'un quelconque des termes du deuxième membre, et on aura ainsi trois genres de machines élévatoire.

- 1- Les machines qui assurent l'élévation du liquide en faisant varier la cote z, les deux autres facteurs; la pression et la vitesse restent inchangées. Ce sont des machines anciennes et rudimentaires. Elles fonctionnent en général par remplissage d'une capacité que l'on élève et que l'on vide une fois la hauteur voulue atteinte. Ce sont par exemple:

Le seau attaché à une corde que l'on jette dans un puit et que l'on tire vers le haut une fois remplie; la noria le shadouf et la vis d'Archimède.

- 2- Les machines dans lesquelles l'élévation est obtenue par la variation de la pression. Ce sont: les pompes à piston alternatives, rotatives.
- 3- Les machines dans lesquelles l'élévation est obtenue par la variation de la vitesse. Ce sont: les pompes centrifuges.



Pompes

Une pompe est une machine hydraulique qui reçoit de l'énergie de l'extérieur, la transforme et la communique à la veine liquide qui la traverse. On distingue, en général, deux genres de machines:

- 1- Les machines hydrauliques dans lesquelles l'élévation est due à la variation de pression. Ce sont les pompes alternatives.
- 2- Les machines dans lesquelles l'élévation du liquide est obtenue par une augmentation de vitesse, liquide, transformée après en pression. Ce sont les pompes centrifuges.

Pompes alternatives

Ce sont, en général, des pompes à piston. Leur fonctionnement est basé sur une capacité qui varie. La variation de la capacité est obtenue par un élément mobile: le piston qui se déplace dans le corps de la pompe. Un jeu de soupapes associés, qui en s'ouvrant et se fermant, dirige le liquide dans sa trajectoire, achève le mécanisme.

La hauteur de refoulement de ces pompes est théoriquement illimitée. Elle dépend de la puissance disponible, de la résistance des organes et de l'étanchéité des joints.

Le rendement des pompes à piston dépend de leur perfectionnement et usage. S'il n'est que de 30 à 50% pour les appareils ménagers, il varie entre 75 et 90% pour les pompes industrielles.

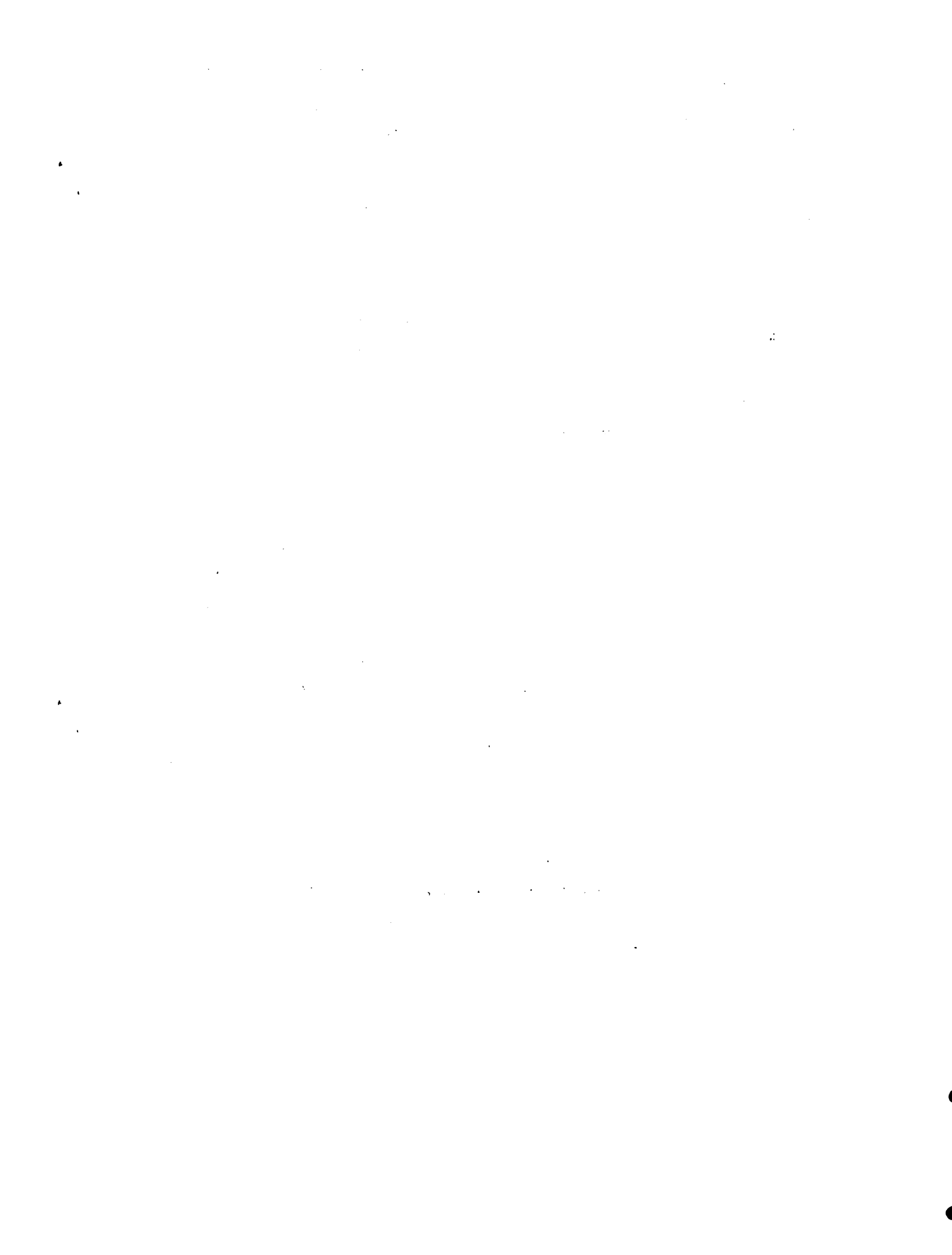


Pompes centrifugesConstitution de la pompe centrifuge

Une pompe centrifuge est une machine qui prend le liquide, lui communique une vitesse considérable, et transforme cette vitesse en pression.

Elle se compose essentiellement:

- D'une roue mobile ou rotor solidaire d'un arbre qui reçoit et lui communique un mouvement rotatif qui la fait tourner à grande vitesse. Cette roue est munie d'ailettes incurvées ou aubes dont le rôle est de provoquer l'échange d'énergie entre la roue et la veine liquide qui la traverse.
- La roue tourne à l'intérieur d'une couronne fixe munie d'aubes fixes appelées directrices, dont la courbure est inverse de celle des aubes de la roue, et dont la fonction est de diriger le liquide vers des directions appropriées. C'est le diffuseur.
- Le liquide sortant du diffuseur est reçu dans un canal hélicoïdal: le colimaçon ou bêche en forme de spirale où se produit le ralentissement de la vitesse que la roue a communiquée au fluide, transformant ainsi l'énergie cinétique acquise en énergie de pression.



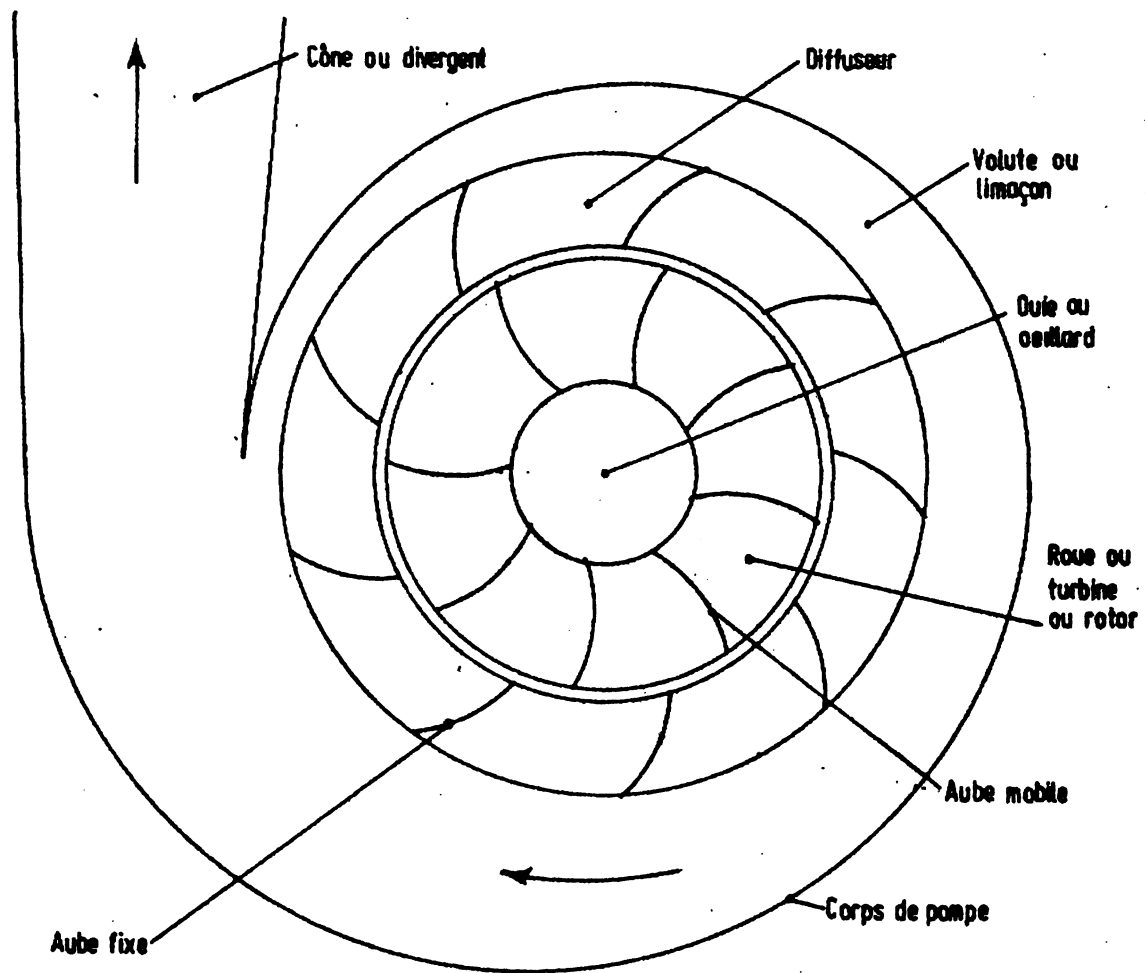


Fig. 45 Section d'une pompe centrifuge



Equation fondamentale des pompes centrifuges

Le mouvement du liquide à l'intérieur de la roue peut être considéré comme étant le résultat de deux mouvements distincts: Un mouvement d'entraînement par la rotation de la roue autour de son axe; un mouvement relatif par le déplacement du liquide par rapport à la roue. Une particule de liquide se déplaçant à l'intérieur de la roue est soumise à une vitesse d'entraînement u et à une vitesse relative w . Ces deux vitesses se combinent pour donner la vitesse absolue v de la particule.

Nous allons supposer, pour le raisonnement, une roue de pompe idéale avec une infinité d'aubes d'épaisseur négligeable et dans laquelle la trajectoire de chaque particule de liquide suit la surface d'une aube.

Construisons le parallélogramme des vitesses d'une particule à l'entrée et à la sortie de la roue.

La vitesse d'entraînement u sera tangente à la circonférence de la roue passant en ce point; la vitesse d'entraînement w sera tangente à l'aube en ce point. La composition des deux vitesses donne la vitesse absolue v . Les vitesses à l'entrée ainsi que les grandeurs qui s'y rapportent seront affectées de l'indice 1 et pour la sortie de l'indice 2.

Désignons par α l'angle formé par les vecteurs, vitesse absolue et vitesse d'entraînement et par β l'angle du vecteur, vitesse relative avec la tangente à la circonférence du point dans le sens contraire à la rotation. Affectons les deux indices 1 et 2.

Appelons de plus:

V_u : la projection de la vitesse absolue sur la tangente à la circonférence du point
on aura: $V_u = V \cos$

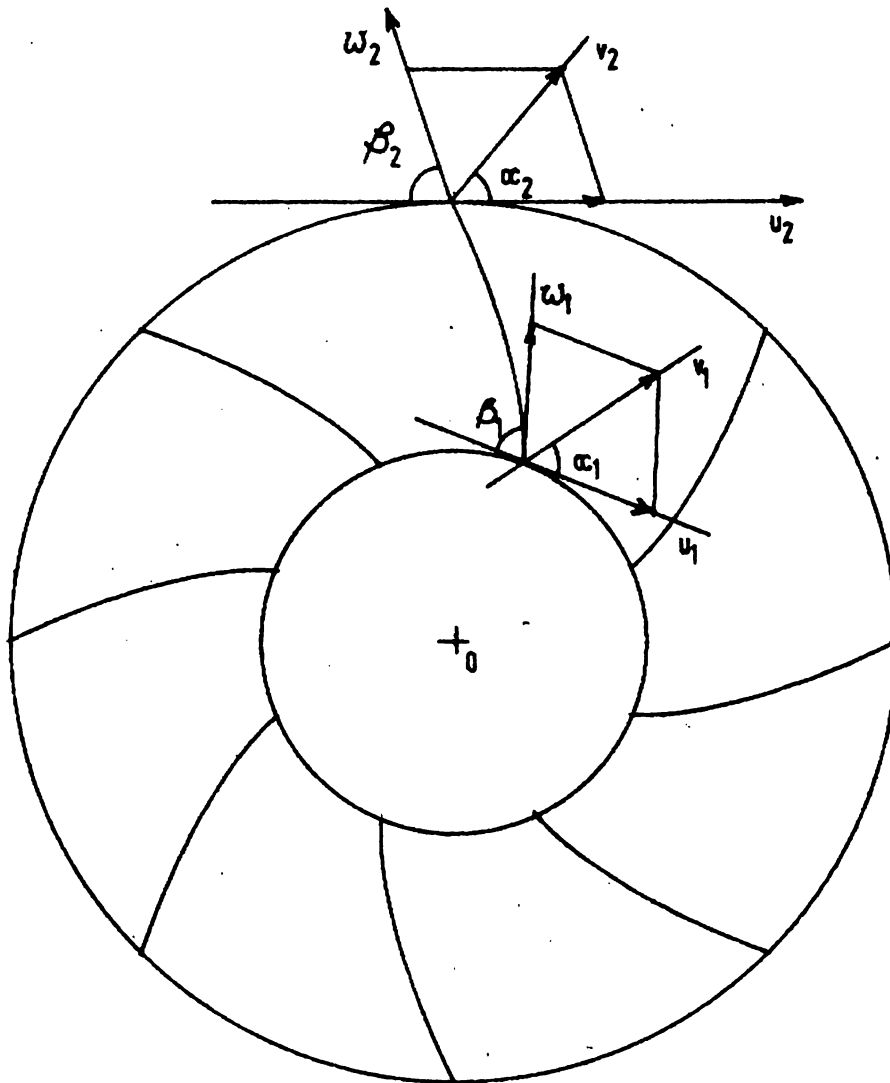


Fig. 46 Les vitesses d'entrée et de sortie dans une pompe centrifuge.

V_r : La projection sur le rayon

r_1 : Rayon à l'entrée du filet de la circonférence du point

r_2 : Rayon à la sortie du filet de la circonférence du point

γ_w : Poids spécifique du liquide

ω : Vitesse angulaire



- u : Vitesse d'entraînement; $u = \omega r$ tangente à la circonférence du point.
 w : Vitesse relative tangente à l'aube
 v_1 : Vitesse absolue à l'entrée $\vec{v}_1 = \vec{w}_1 + \vec{V}_1$
 v_2 : Vitesse absolue à la sortie $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 + \vec{V}_2$
 v_u : Projection de la vitesse absolue sur la tangente à la roue vitesse circonférentielle
 v_r : Projection de la vitesse absolue sur le rayon, vitesse radiale.

Considérons notre pompe qui tourne à la vitesse angulaire ω constant, le théorème du moment cinétique: la variation par rapport au temps du moment de quantité de mouvement d'un système par rapport à un axe est égale à la somme des moments par rapport au même axe des forces extérieures agissant sur le système. Pour un débit Q de la pompe nous avons:

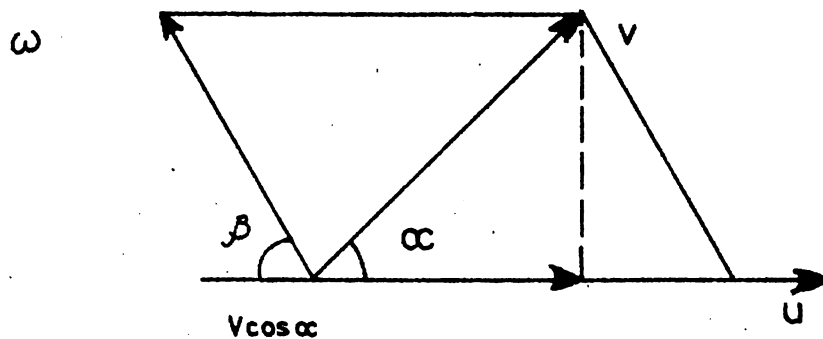


Fig. 47 Composantes de la vitesse dans une pompe

Moment Quantité de Mouvement:



$$\text{Quantité de mouvement: } \frac{\gamma_w}{g} Q v_1 \cos \alpha_1$$

$$M v$$

Entrée:

$$\text{Mouvement Quantité de}$$

$$\text{Mouvement: } M v r : \frac{\gamma_w}{g} Q v_1 \cos \alpha_1 r_1$$

$$\text{Quantité de Mouvement: } \frac{\gamma_w}{g} Q v_2 \cos \alpha_2$$

Sortie

$$\text{Moment Quantité de}$$

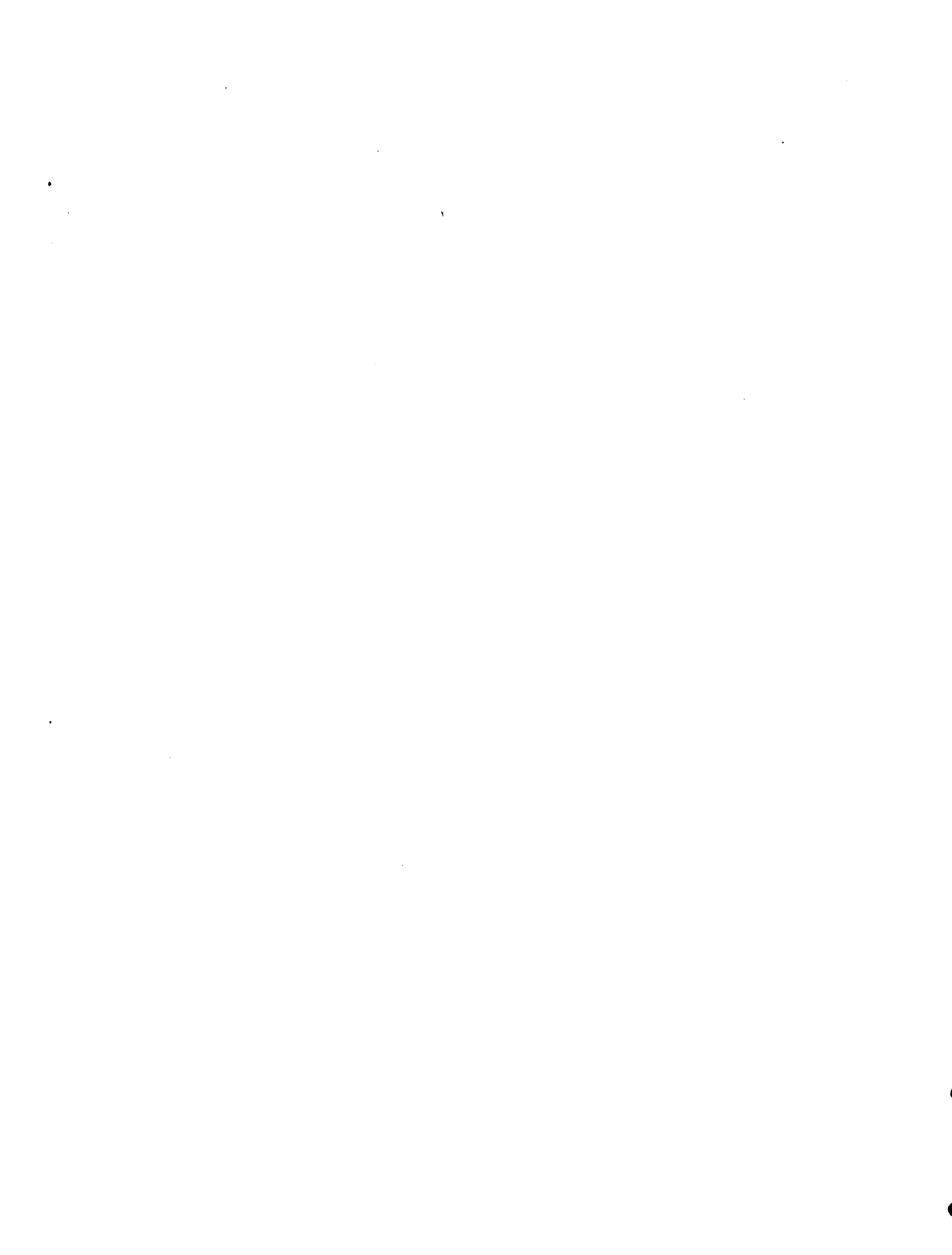
$$\text{Mouvement : } \frac{\gamma_w}{g} Q v_2 \cos \alpha_2 r_2$$

Variation de quantité de mouvement:

$$\frac{\gamma_w Q}{g} \left(\underbrace{v_2 \cos \alpha_2 r_2}_{v u} - \underbrace{v_1 \cos \alpha_1 r_1}_{v u} \right) = M$$

M = Moment des forces extérieures = couple de torsion sur l'arbre de la pompe.

La puissance appliquée à l'arbre de la pompe est égale à l'énergie reçue par unité de temps par le courant qui la traverse.



On a donc pour la roue animée de la vitesse angulaire ω .
Puissance égale au couple appliquée à l'arbre par la vitesse

$$P = M\omega = \gamma_w QH$$

H = Hauteur créée par la pompe ou hauteur de chute

Puissance = Poids du liquide x Hauteur d'élévation

$$\frac{\gamma_w Q}{g} (v_2 \cos \alpha_2 r_2 - v_1 \cos \alpha_1 r_1) \omega = \gamma_w QH$$

$$H = \frac{\gamma_w}{g} (v_2 \cos \alpha_2 r_2 - v_1 \cos \alpha_1 r_1)$$

Qui est l'équation fondamentale théorique des pompes centrifuges, c'est aussi l'équation fondamentale pour les turbines en changeant les signes des termes entre parenthèses.

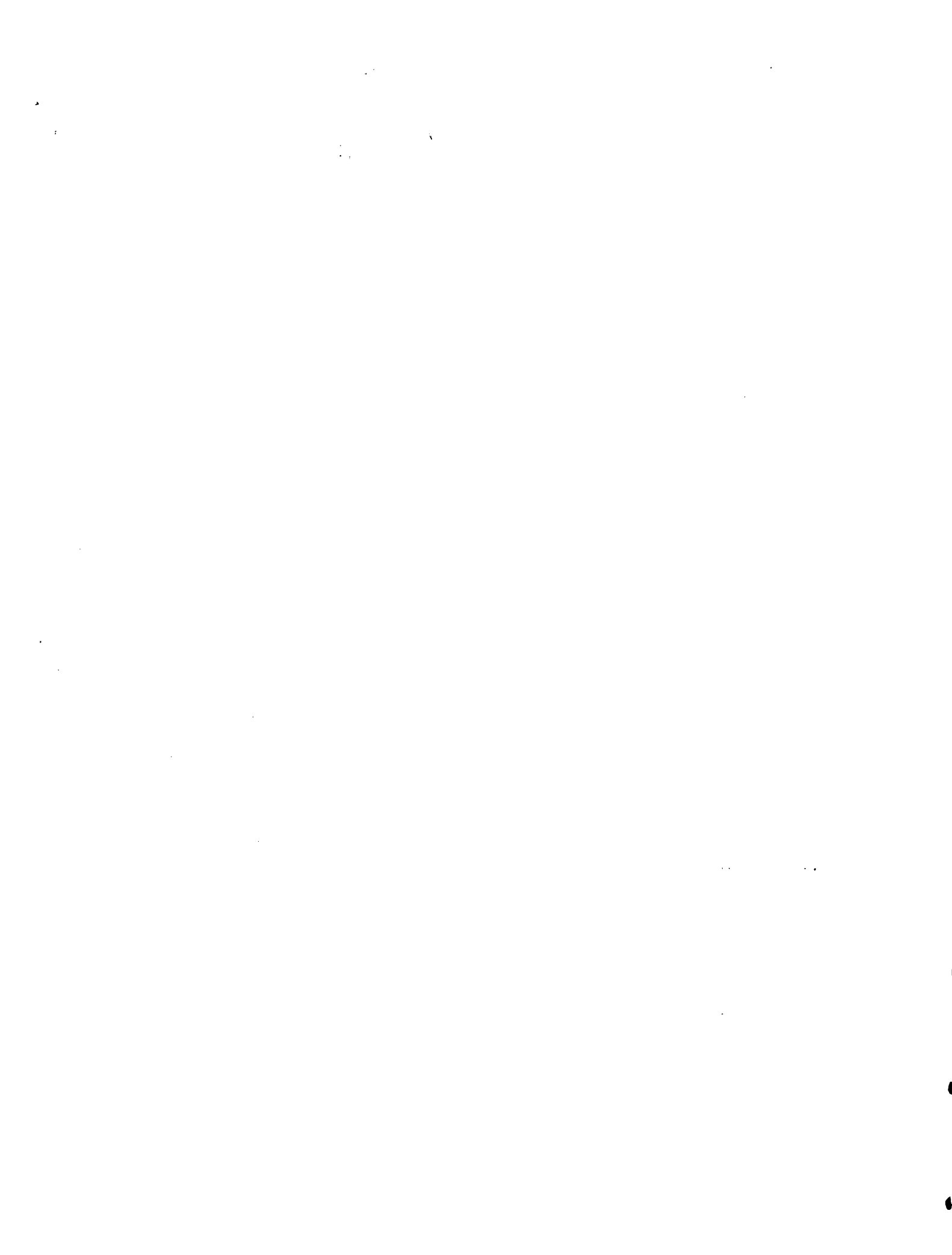
En général l'eau arrive dans l'ouïe de la pompe suivant une conduite perpendiculaire à la roue et sans vitesse de rotation. Elle entre dans la roue suivant une direction radiale en sorte que $\alpha_1 = 90^\circ$

D'où:

$$\cos \alpha_1 = 0 \quad \text{et le terme} \quad v_1 \cos \alpha_1 r_1 = 0$$

Ce qui ramène la relation à:

$$H = \frac{\gamma_w}{g} v_2 \cos \alpha_2 r_2 = \frac{U_2 v_{2u}}{g}$$



Courbe caractéristique de la pompe centrifuge: $H = f(Q)$

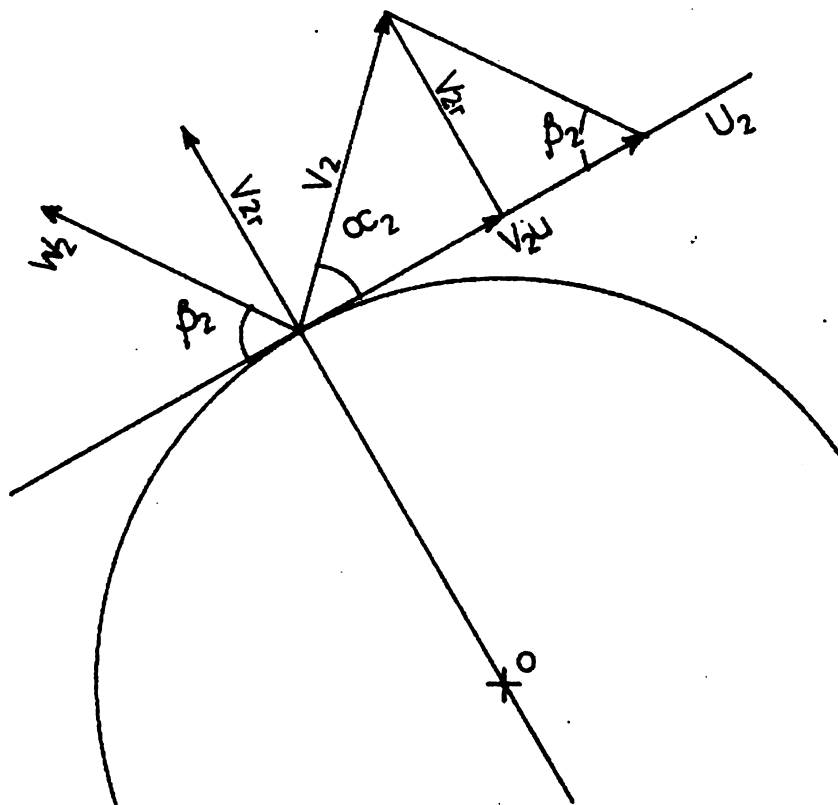


Fig. 48 Schéma pour l'analyse de la vitesse dans une pompe centrifuge.

Considérons le parallélogramme des vitesses à la sortie de la roue.

Nous avons les relations suivantes:

$$U_2 - V_{2u} = V_{2r} \cot \beta_2$$

$$v_{2r} = \frac{U_2 - V_{2u}}{\cot \beta_2} \quad \text{et} \quad v_{2u} = U_2 - V_{2r} \cot \beta_2$$



Soit Q le débit à la sortie de la pompe, on a la relation:

$$Q = V_{2r} \times S \text{ (sortie de la pompe)}$$

$$Q = V_{2r} \times 2\bar{\kappa} r b_2$$

b_2 = Largeur de l'ouverture de la roue, ou écartement des 2 disques constituant la roue à la sortie.

$$V_{2r} = \frac{Q}{2\bar{\kappa} r b_2}$$

La relation $H = \frac{U_2 V_{2u}}{g}$ devient en portant V_{2u} en fonction

de V_{2r} et Q

$$H = \frac{U_2}{g} (U_2 - V_{2r} \cot \beta_2)$$

$$H = \frac{U_2}{g} \left(U_2 - \frac{Q \cot \beta_2}{2\bar{\kappa} r b_2} \right)$$

C'est l'équation de la caractéristique d'une pompe centrifuge idéale avec une infinité d'aube.

$$H = F(Q) \text{ pour } \omega \text{ constant}$$



Le tracé de la courbe a l'aspect suivant:

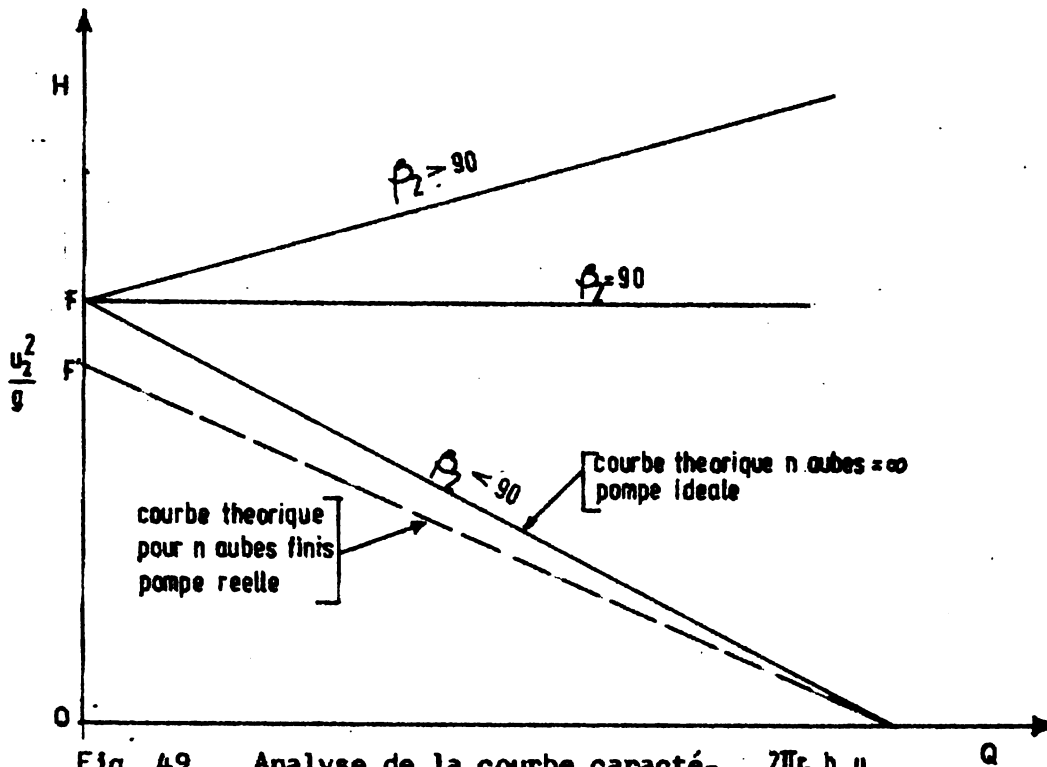


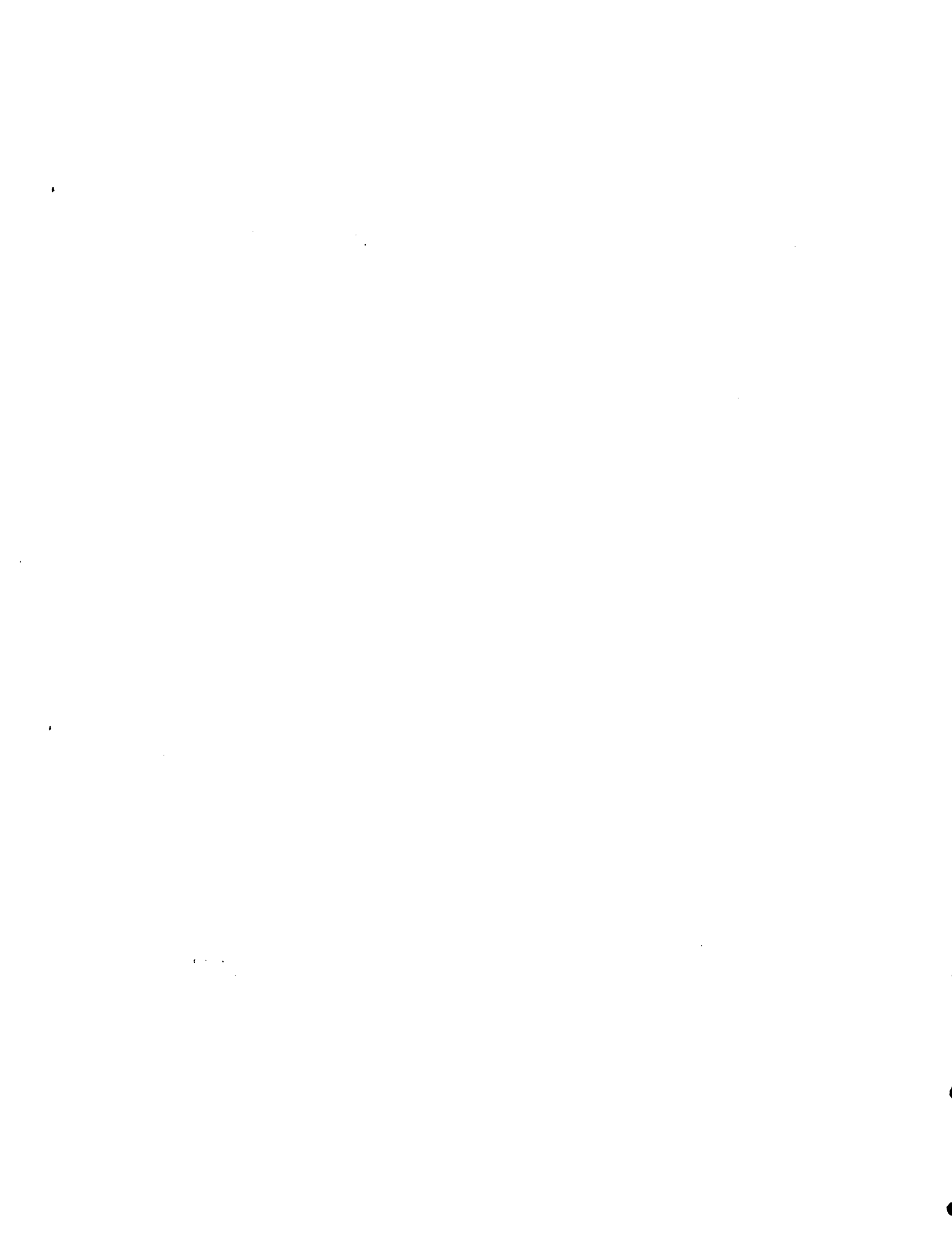
Fig. 49 Analyse de la courbe caractéristique de la pompe centrifuge idéale.

$$\frac{2\pi r_2 b_2 u_2}{\cotg \beta_2}$$

Courbe caractéristique de la pompe centrifuge idéale

Quoique la courbe pour $\beta_2 > 90^\circ$ paraît plus avantageuse on préfère utiliser les pompes avec $\beta_2 < 90^\circ$ car donnant de meilleurs rendements

En fait le nombre d'aubes n'est pas ∞ mais fini. Ce qui a pour conséquence que l'écoulement n'est plus à filets à l'intérieur de la roue et les vitesses moyennes, dont il faut maintenant tenir compte, sont moindres.



dres que la vitesse idéale des filets. Et la courbe théorique, parte en un point F' plus bas que F sur le graphique.

De plus, il faut considérer dans la pompe réelle les pertes de charge qui se produisent dans la roue et qui ont pour résultat de diminuer la hauteur H . Ces pertes de charges qui sont dues d'une part au frottement du liquide sur lui-même et sur les éléments de la roue et d'autre part au chocs du courant liquide sur les divers éléments de la roue. Ces pertes de charges peuvent être exprimées en fonction du carré de la vitesse, on les écrira sous la forme:

$$h_p = KQ^2$$

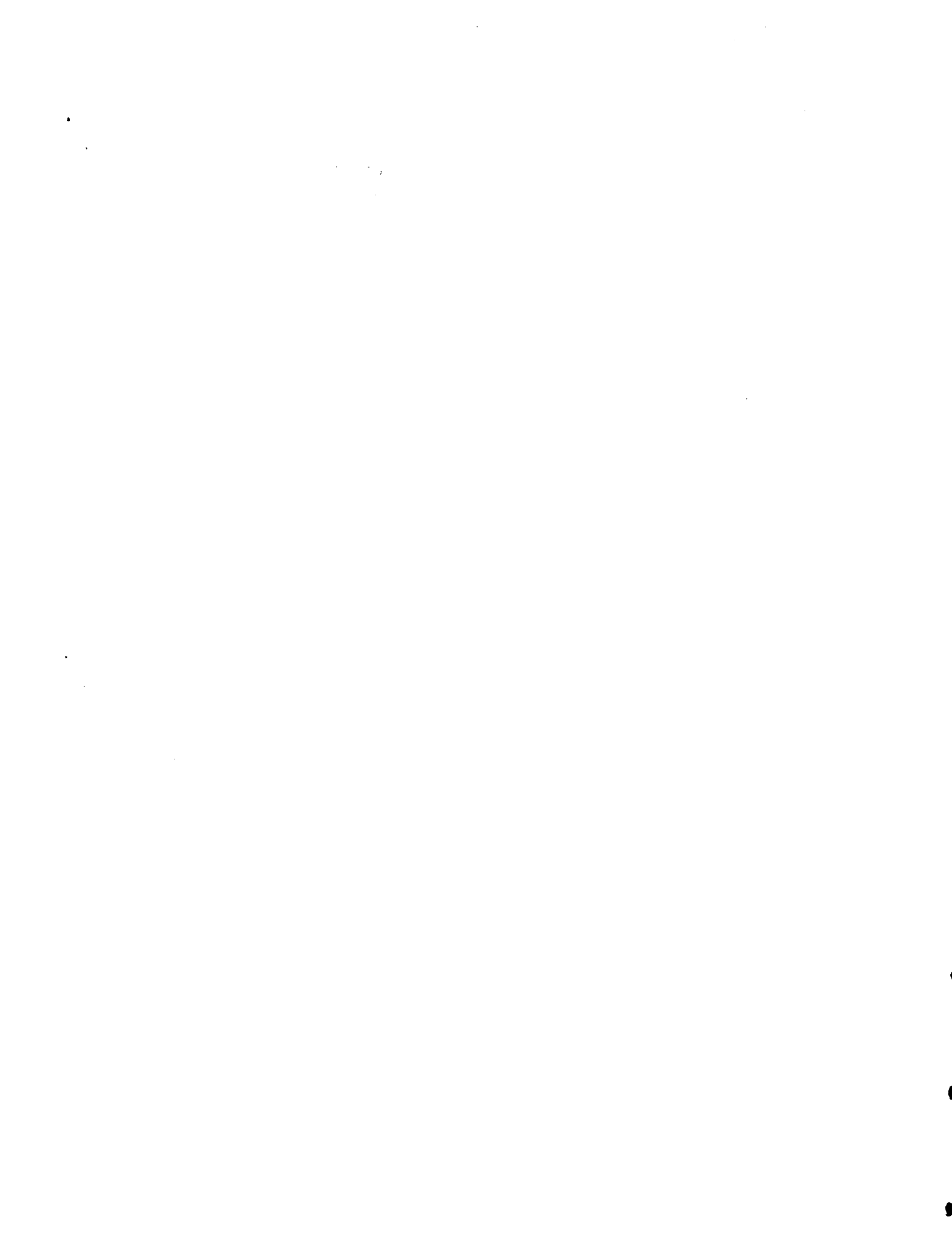
Le tracé de la caractéristique $H = f(Q)$ pour ω constant se fera de la façon suivante:

Sur un système de coordonnées H, Q , traçons d'une part la courbe théorique pour la pompe réelle définie précédemment et la courbe

$h_p = KQ^2$. Et pour chaque valeur de Q calculons les quantités.

$$\text{Hauteur réelle} = \text{Hauteur théorique} - h_p$$

Relions les différents points ainsi trouvés et nous obtiendrons la courbe caractéristique réelle de la pompe pour une vitesse de rotation constante.



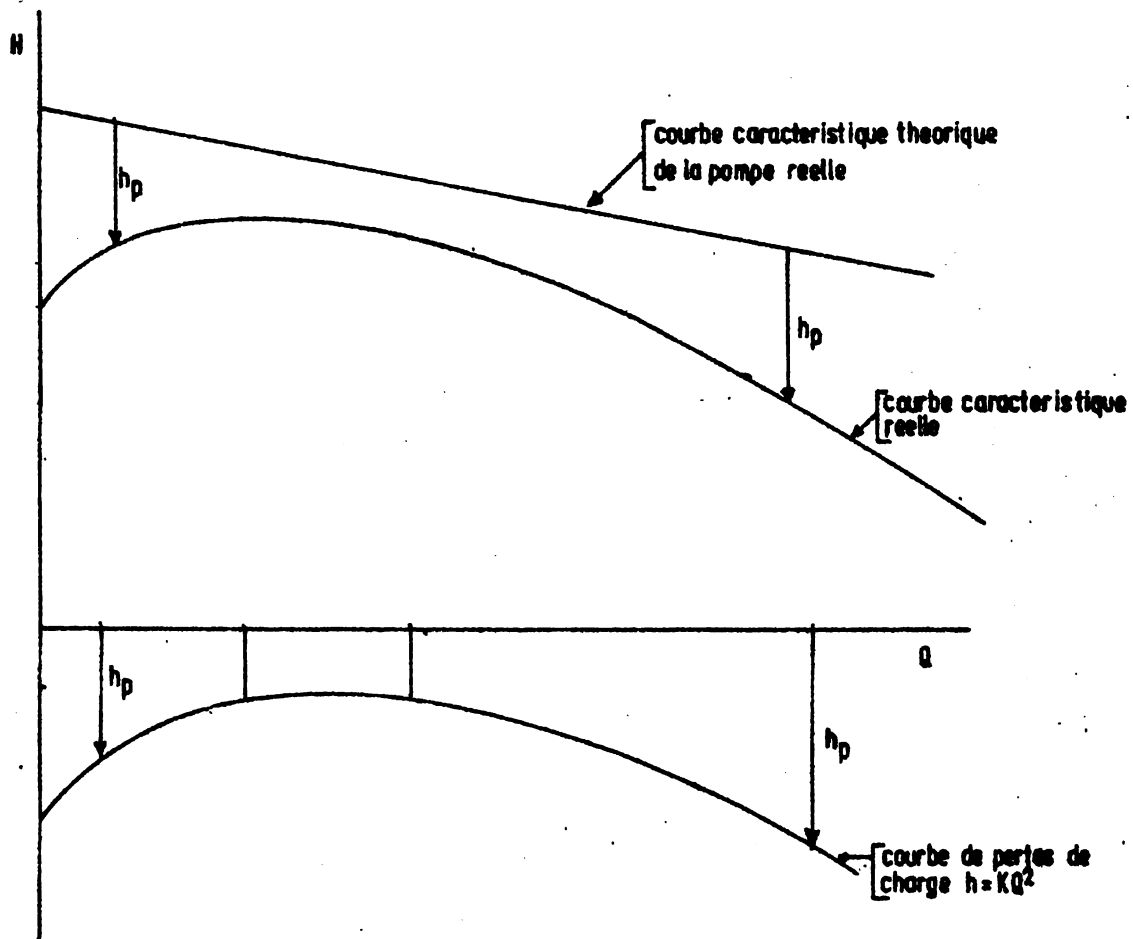


Fig. 50- Courbe caractéristique théorique de la pompe réelle et les pertes de charge.

En raison de la pratique du fait des difficultés à obtenir, la valeur $h = KQ^2$, on préfère déterminer la courbe caractéristique d'une pompe donnée par des dimensions expérimentales directes.



Définitions

Hauteur Géométrique d'Aspiration

C'est la distance verticale qui sépare le niveau de l'eau à pomper, à:

- L'axe de la pompe centrifuge, si elle est horizontale
- Au plan moyen des aubes, si c'est une pompe centrifuge verticale

Hauteur Géométrique de Refoulement

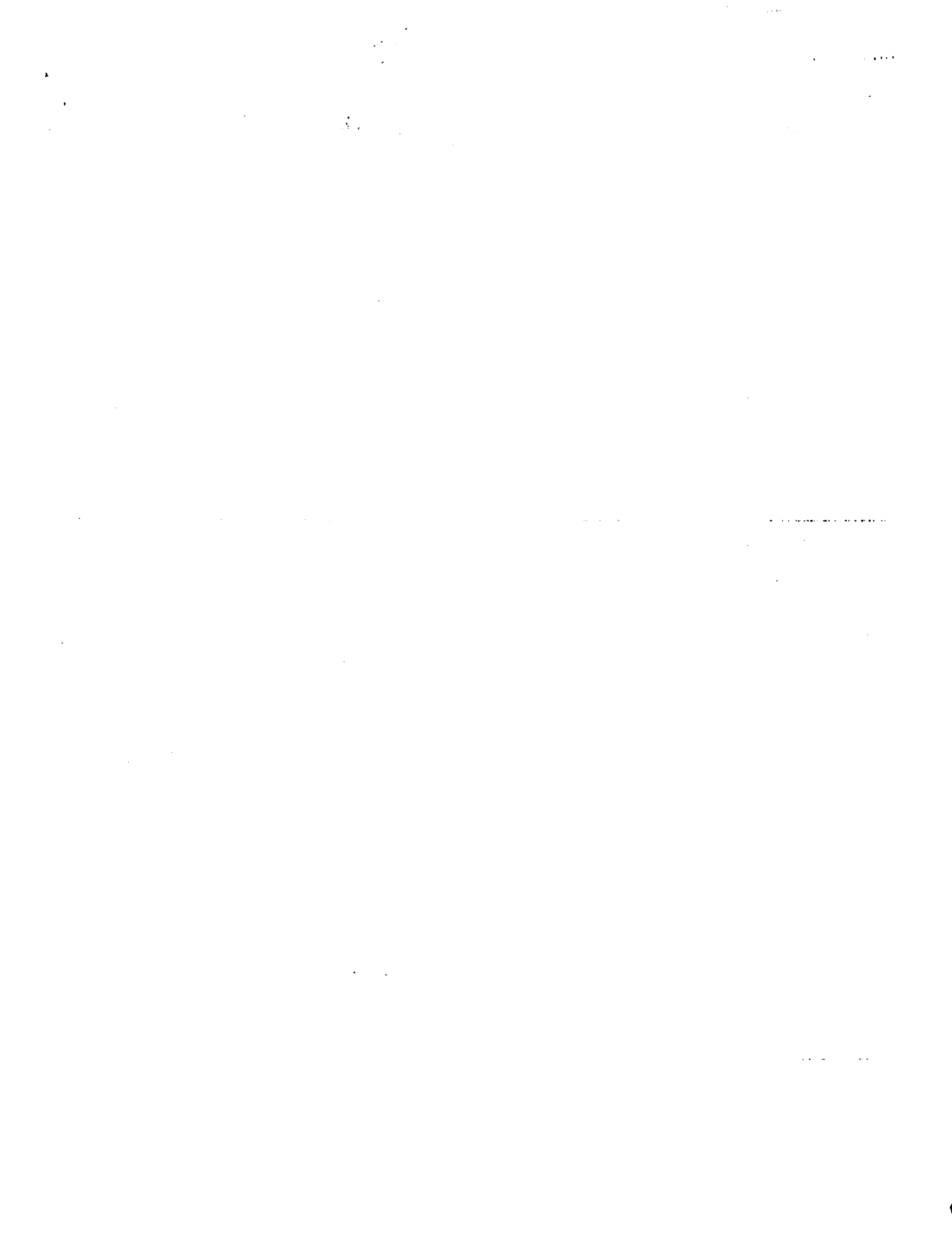
C'est la distance verticale qui sépare le niveau de l'eau dans le réservoir de refoulement à:

- L'axe de la pompe horizontale
- Au plan moyen des aubes, de la pompe verticale

Hauteur Totale d'Aspiration

C'est la hauteur totale d'aspiration qui dépend de l'installation. Elle est la somme de:

- La hauteur géométrique d'aspiration
- De la perte de charge par frottement sur la longueur de la conduite d'aspiration
- Des pertes de charges singulières telles que: clapets de pied, courbes, reduceurs et tout autres pièces et instruments placés sur la conduite d'aspiration, Vitesse à l'entrée de l'aspiration, etc...



Hauteur Totale de Refoulement

C'est la hauteur totale de refoulement qui ne dépend que de l'installation. Elle est la somme de :

- La hauteur géométrique de Refoulement
- De la perte de charge par frottement sur la longueur de la conduite de refoulement.
- Des pertes de charges singulières tels que: couds, anti-belier, clapets de non-retour, reduceur ou divergent, vitesse à la sortie dans le réservoir, etc...

Hauteur Totale d'Élévation

C'est la somme de la Hauteur Totale d'Aspiration et de la Hauteur Totale de Refoulement.

C'est cette hauteur qui est utilisée pour le calcul de la puissance de la pompe.

Puissance Fournie par la Pompe

C'est la quantité :

$$P = \gamma_w Q H$$

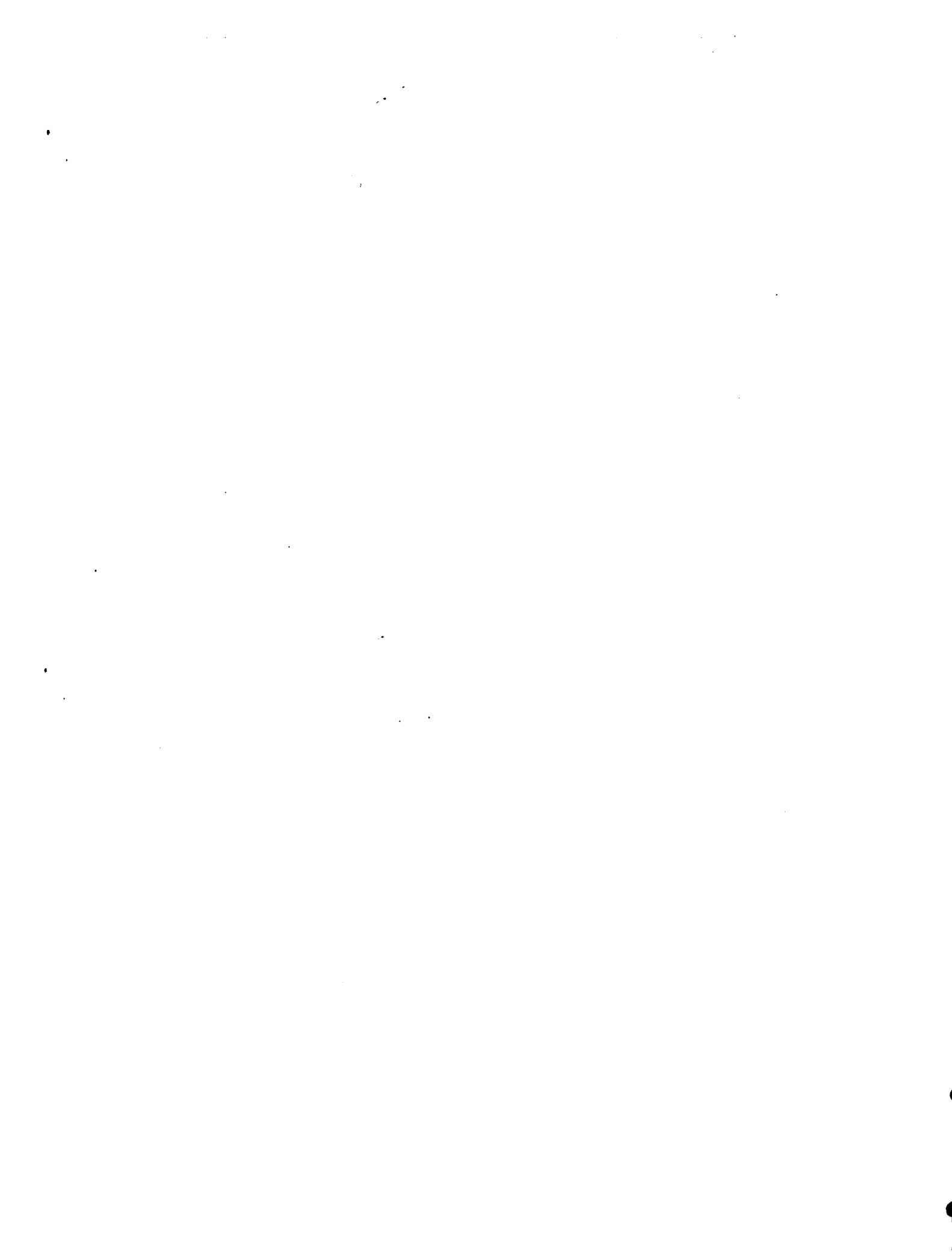
qui exprime le travail fourni en l'unité de temps dans laquelle

P = Puissance, en kg m/s

γ_w = Poids spécifique du liquide, kg/m³

Q = Débit du liquide, en m³/s

H = Hauteur d'élévation totale en m



Si γ_w est en kg/dm^3

Q est en litre par seconde

H est en mètre

On a:

$$P_{(cv)} = \frac{\gamma_w Q H}{75}$$

$$P_{(kw)} = 0,736 P_{(cv)}$$

Rendement de la pompe

$$\frac{\text{Puissance Fournie}}{\text{Puissance Absorbée}}$$

C'est le rapport de la puissance fournie par la pompe à la puissance absorbée ou fournie par le moteur de la pompe.

Le rendement de la pompe-Moteur est le rapport de la puissance fournie par la pompe à la puissance absorbée par le moteur. Il est aussi égal au produit du Rendement du moteur par le rendement de la pompe.

Courbe Caractéristique du Système

Connaissant les différents éléments du système à desservir. On peut pour chaque débit déterminer la valeur totale de la perte de charge sur le réseau.

Ensuite, on trace la courbe $f(Q)$ du système sur un graphique, pour obtenir ce que l'on appelle la courbe caractéristique du système

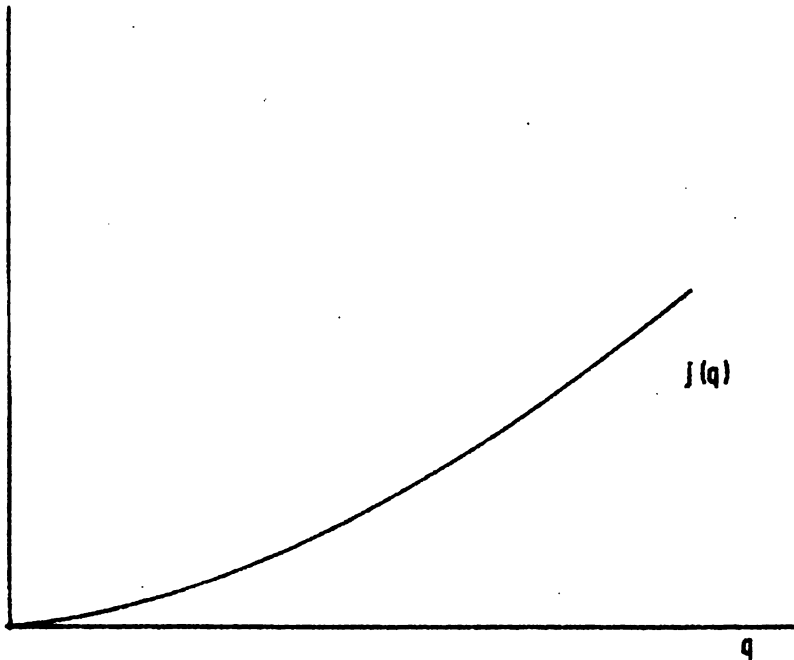


Fig. 51 Relation perte de charge - débit
Point de Fonctionnement de la Pompe sur un Réseau donné

On trace la courbe caractéristique de la pompe $H(Q)$ sur un graphique.

Sur cette même graphique et à la même échelle on trace la courbe caractéristique du réseau $f(Q)$, en partant du point $Q = 0$; $j =$ hauteur géométrique de refoulement

Les 2 courbes se coupent en un point M qui est le point de fonctionnement de la pompe pour le système donné.



On pourra déterminer à l'aide des courbes de rendement, de puissance fournies par le constructeur ces éléments pour le système en question

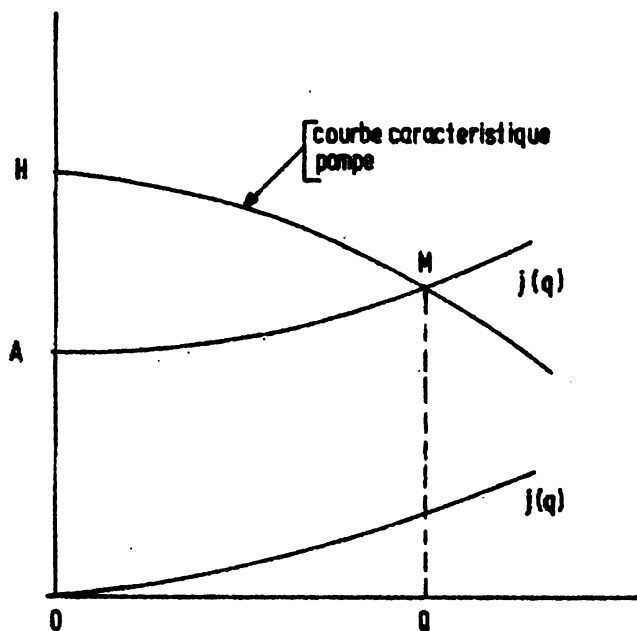


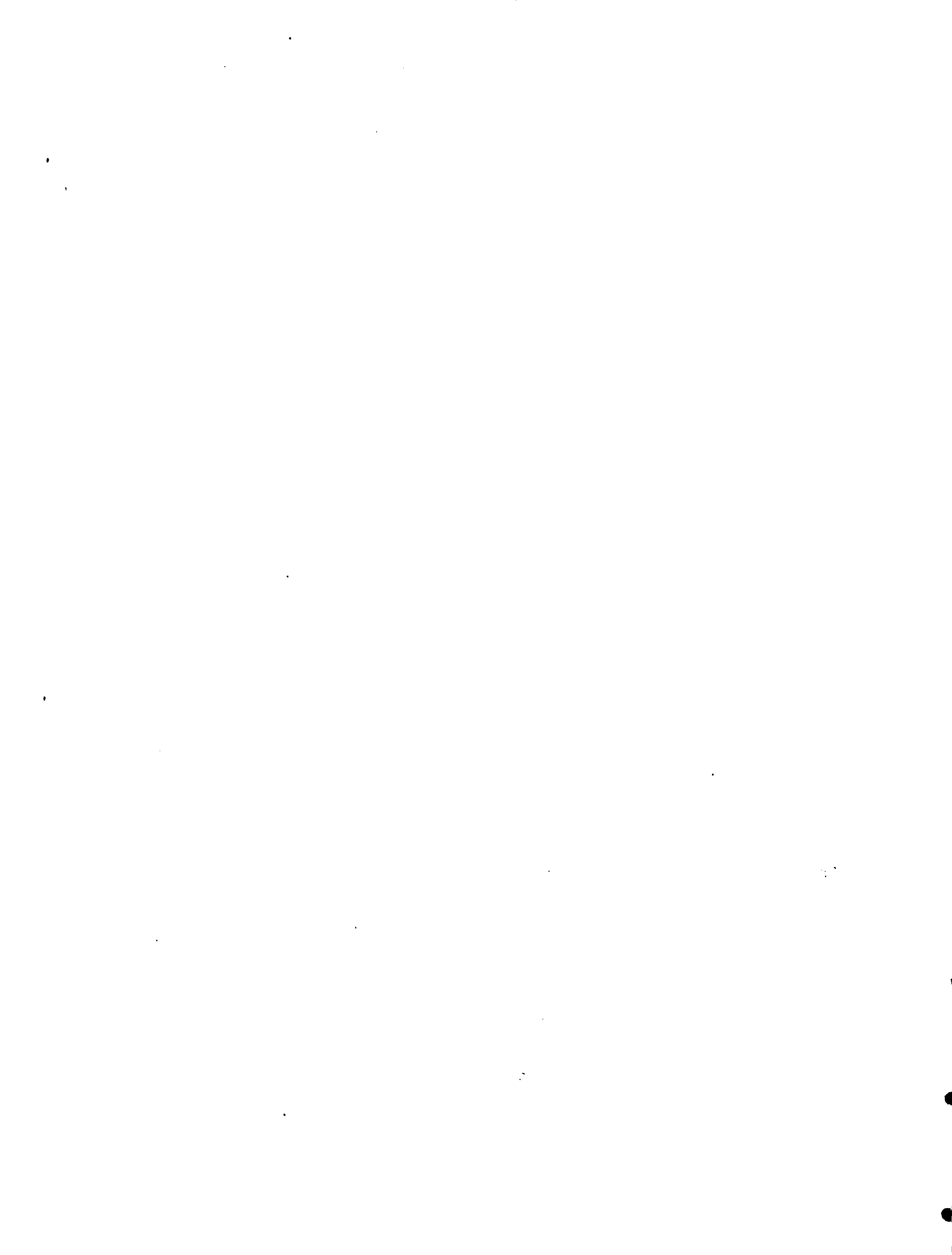
Fig. 52- Courbe caractéristique du système.

Charge Nette à l'Aspiration NPSH

Le problème de la fixation du niveau de la pompe au-dessus de la surface d'eau à pomper est très important.

La hauteur d'aspiration étant représentée par la somme de:

- La hauteur de la pompe au-dessus de la surface de l'eau
- La hauteur représentative de la vitesse à l'entrée de la pompe
- La hauteur des pertes de charge dans la canalisation d'aspiration



Soit: H_s :

La hauteur représentative de la pression atmosphérique
 étant $\frac{p_a}{\gamma_w}$

La hauteur représentative de la hauteur de pression de
 vapeur h_v

On appelle NPSH la quantité:

$$\left(\frac{p_a}{\gamma_w} - h_v\right) - H_s = \text{NPSH (disponible)}$$

Pour toute installation dans le but d'éviter la cavitation, la pompe exige à son entrée une certaine valeur du NPSHr ou NPSH requis au-dessous de laquelle le NPSHd ne doit pas descendre. Il est donc nécessaire dans chaque installation de vérifier non seulement que la Hauteur Totale d'Aspiration ne dépasse pas les 10 mètres, mais aussi de vérifier pour la cavitation.

Relation de Similitude dans les Pompes Centrifuges

Considérons des pompes centrifuges géométriquement semblables, c'est à dire des pompes où les dimensions sont proportionnelles et dont la similitude des lignes de courant et la proportionnalité des vitesses correspondantes; ainsi que la similitude dynamique ou proportionnalité des forces qui agissent sur des éléments correspondants de courants cinématiquement semblables, nous avons entre les différents éléments des systèmes les relations de similitude suivante:



Variation de Diamètre

Considérons 2 pompes semblables de Diamètre D_1 et D_2 , il existe entre ces deux pompes les relations suivantes: pour une même vitesse de rotation.

$$\text{Débit : } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$\text{Hauteur: } \frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

$$\text{Puissance: } \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3$$

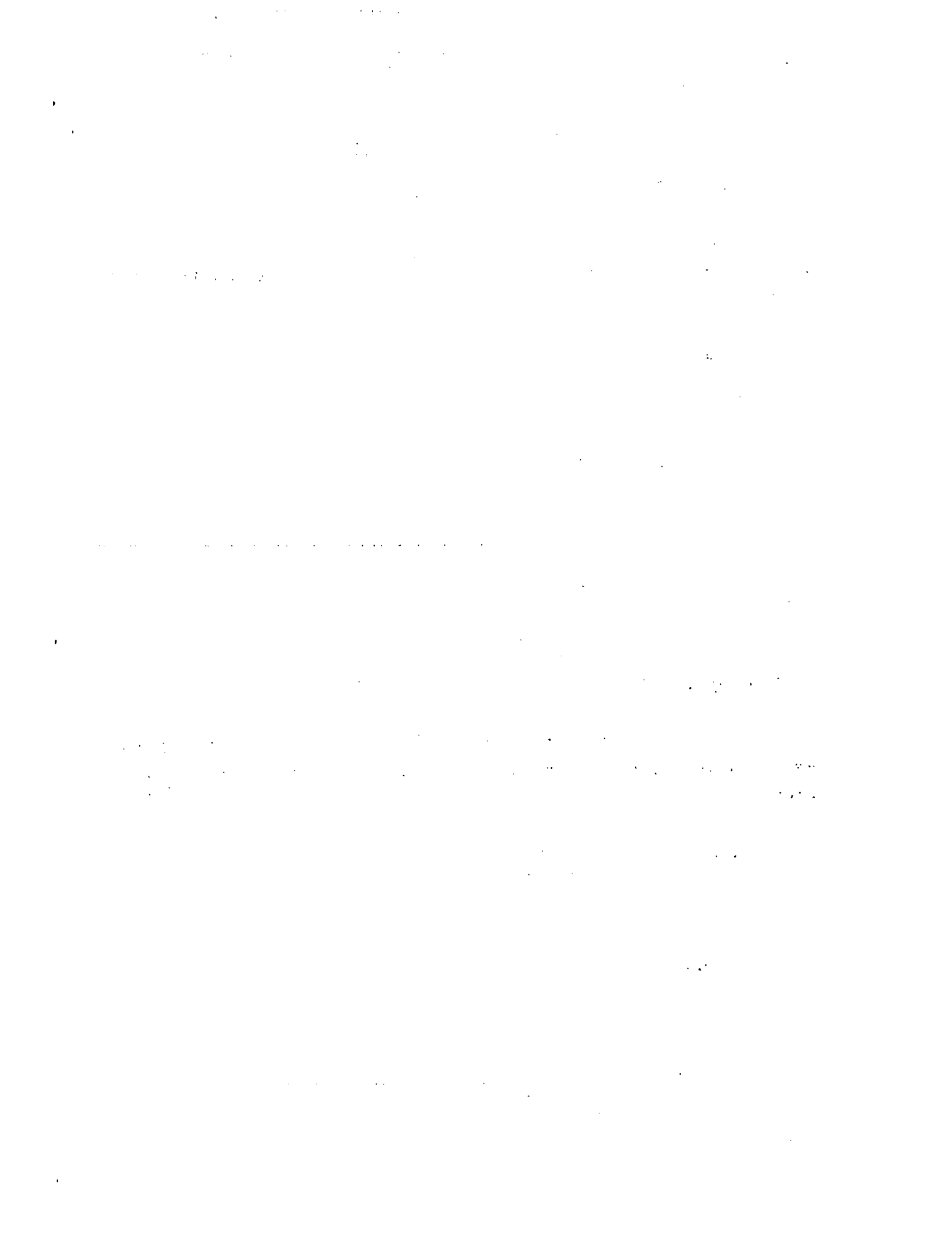
Variation de Vitesse

Considérons une pompe centrifuge que l'on fait tourner successivement à deux vitesses différentes N_1 et N_2 , nous avons les relations suivantes:

$$\text{Débit : } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\text{Hauteur : } \frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

$$\text{Puissance: } \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^3$$

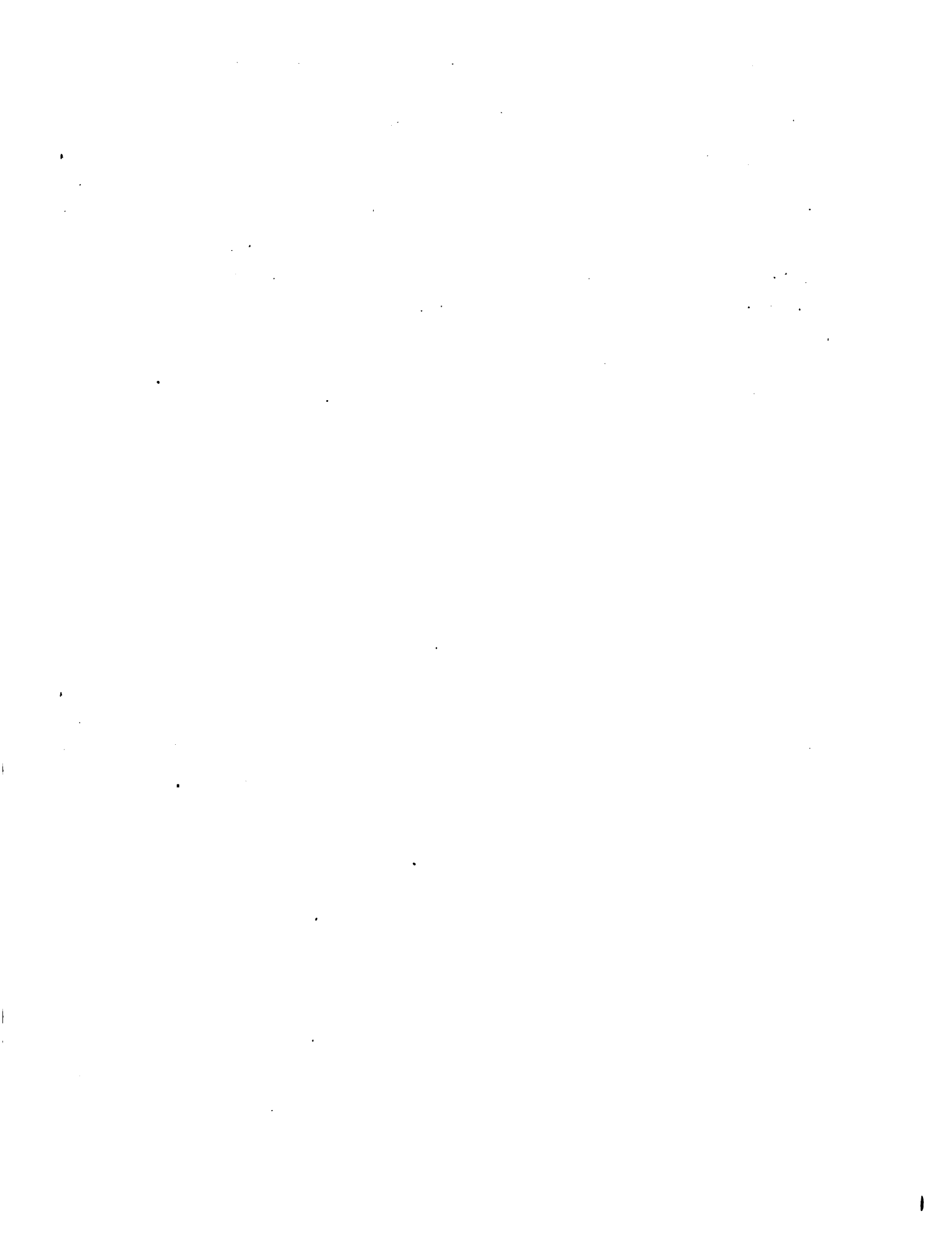


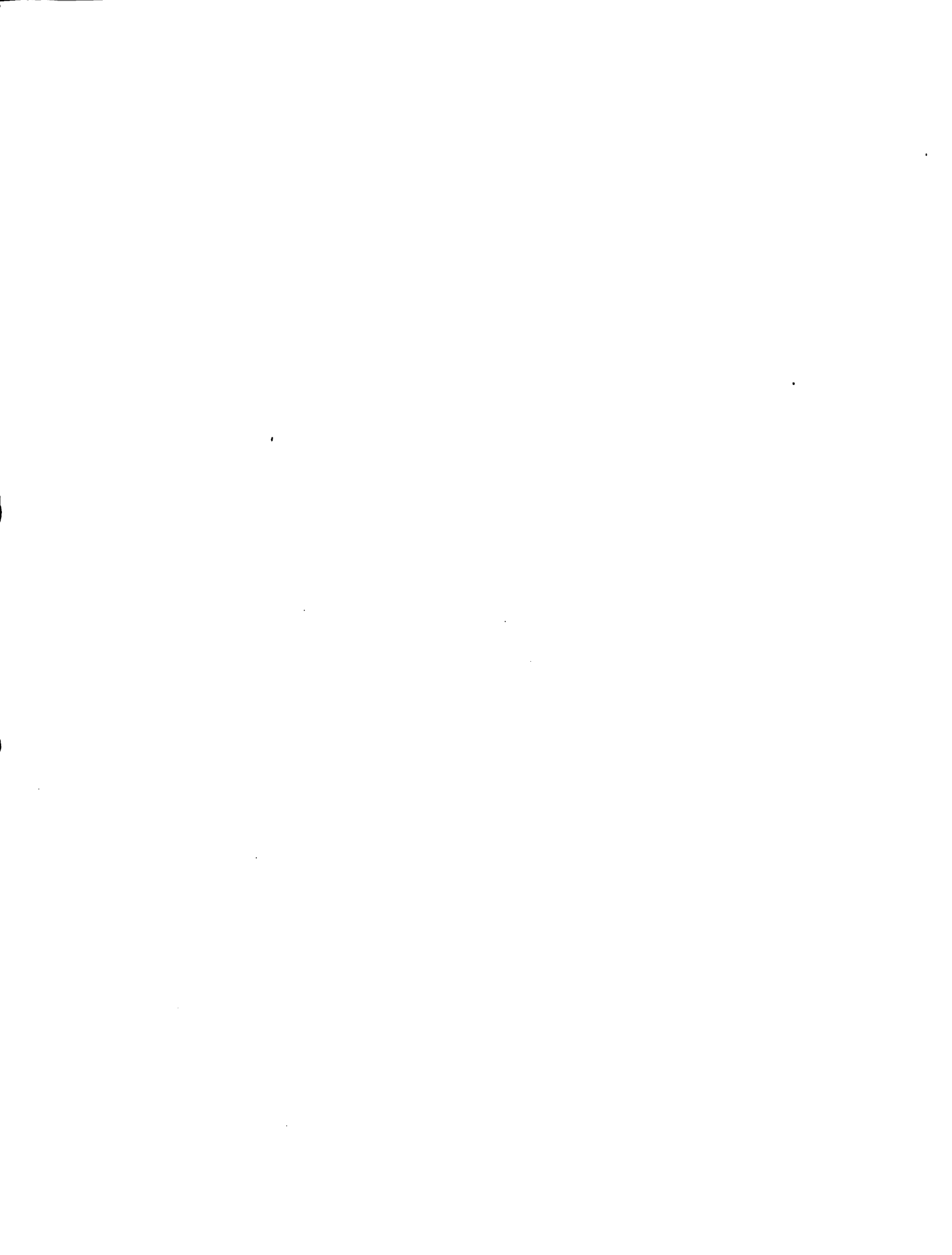
Vitesse Spécifique

Considérons une série de pompes semblables fonctionnant en similitude mécanique. On appelle vitesse spécifique, la vitesse à laquelle tournerait la pompe semblable qui fournirait un débit de $1 \text{ m}^3/\text{s}$ sous une hauteur de 1 m.

Elle est donnée par:

$$N_s = N \frac{Q^{1/2}}{H^{3/4}}$$





Documents
to
microfilm.

